「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}=\log\frac{2n+2}{n+2}$ を証明せよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$

【（１）の解説】

＊この問題は、実際の大学受験では頻出ですよ。初めての人は難しく感じる人が多いです。ただ、「こんな解法もある」ということを頭に入れておいてください。そうすれば、自然と解けるようになってきますよ。

まず、今回 $\sum$(シグマ) の問題なんだよね。シグマについては、以下のことを覚えておいてください。

シグマの考え方について

シグマで公式が使えないときは、$\sum(a_k-a_{k+1})$ などと、互いに打ち消し合う形になっている！

上記の説明にいくね。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ や $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を勉強したよね。シグマの公式は、こういったものです。

こういったもののときは、シグマは公式を使って計算しました。また、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$ といったものは、等比数列の和として計算します。

それ以外のシグマの問題は、<u>必ず $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$ という互いに打ち消し合う形になります。</u>

シグマで互いに打ち消しあうものとしては、シグマの中身が分数のときが有名です。このとき部分分数分解で打ち消しあう形にしたよね。

シグマで打ち消し合う形にして解くのは分数のときくらいかな？と思っている人もいます。

でも、そんなことありません。打ち消しあうのはいろいろなパターンがありますよ。シグマの中身が対数、ルートなど、他にもいろいろなパターンがあります。

とにかく、公式が使えないときは互いに打ち消しあう形になっています。まずは、このことをしっかりと頭に叩き込んでください。

＊実はシグマの公式も、この互いに打ち消し合う形を利用して導いています（今回、証明は省略)。そういった意味で、シグマの計算は互いに打ち消しあう形にもっていく、くらいしか解法がありません。

ここまでで、シグマの中身を互いに打ち消し合う形にもっていくということがわかりました。で、今回の問題ではどうしようかな？と考えます。

シグマの中身を引き算の形で表さないといけません。今回の場合、シグマの中身が対数です。対数の場合、$\log\frac{A}{B} = \log A - \log B$ と変形してマイナスの形にすることができます。

だから、とりあず真数の部分をひとつの分数で表していくことにします。

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right\}$$ ◂ 通分をした！
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\log(k+1)^2-\log k(k+2)\right\}$$ ◂ $\log\dfrac{A}{B}=\log A-\log B$ の公式を使って、引き算の形にした！

とりあえず、「シグマの中身を互いに打ち消し合う形にしたい。打ち消し合う形は、シグマの中身がマイナスだから ⋯ 」という発想のもとで変形していくと上記のようになりました。

で、これで互いに打ち消し合う形になっていてくれたらいいんだけど、まだ互いに打ち消し合う形になっていないよね。

⇑ 互いに打ち消し合う形とは、$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$ などの形になっている場合です。でも、上記の場合まだこの形になっていません。例えば右側の $k(k+2)$ を a_k とでもします（つまり、$a_k=k(k+2)$ とします）。このとき、どう変形しても左側の $\log(k+1)^2$ は $a_{\bigcirc}$ の形になりません。だから、現時点では互いに打ち消し合う形になっていません。

そこで「どうしようかな？」と思うんだけど、ちょっと難しいかもしれませんが、以下のように変形します。

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\log(k+1)^2-\log k(k+2)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{2\log(k+1)-\log k(k+2)\}$$ ◂ $\log(k+1)^2=2\log(k+1)$ より
$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)+\log(k+1)-\log k(k+2)\}$$ ◂ $2\log(k+1)=\log(k+1)+\log(k+1)$ より
$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)+\log(k+1)-\log k-\log(k+2)\}$$ ◂ $\log k(k+1)=\log k+\log(k+1)$ より
$$=\sum_{k=1}^{n}\Big(\{\log(k+1)-\log k\}+\{\log(k+1)-\log(k+2)\}\Big)$$ ◂ シグマの中身の順番を入れ替えた！

上記の式変形を見れば、「ああ、これで互いに打ち消し合う形になっている」ということが理解できると思います。

今回の場合、互いに打ち消しあうものが２つあります。シグマの計算なので、それぞれ計算してもらって、求まった結果を足し合わせてもらったらいいです。

＊「言われたら分かるけど、こんなの気づかないよ」

このタイプの問題、受験では頻出で昔から出ていました。僕が高校生のときにも出題されていました。上記は、僕が始めてこういった問題を見たときの僕の感想です …

互いに打ち消し合う形にするポイントです。互いに打ち消すときは $a_k - a_{k+1}$ といった形になっているんだよね。このときは、次数がそろっていないといけない、係数がそろっていないといけない、というものがあります。

上記の場合、$\log(k+1)^2 - \log k(k+2)$ では、互いに打ち消しあってくれない。そこで、$2\log(k+1) - \log k(k+2)$ と変形します。この段階でもうまくいかない。右側が変形できるので、さらに

$2\log(k+1) - \log k(k+2) = 2\log(k+1) - \log k - \log(k+2)$ と変形します。でも、これでも互いに打ち消し合う形にならない。「互いに打ち消し合うには、似たような形になる。ということは、log の係数も同じかな？」と考えて $2\log(k+1) = \log(k+1) + \log(k+1)$ と変形します。

かなり、難しいけど上記のように発想しました。ただ、重要なこととしては、

シグマの問題で公式が使えないときは、必ず互いに打ち消し合う形になっている！

です。上記のことさえ頭にいれておけば気づけるようになってきます。頑張ってくださいね。

僕も、最初のうちは「こんなん、無理やわ（涙）。絶対に気付けれへん」なんて思っていました（笑）。それでも、ある程度回数をこなせばできるようになってきますよ。

「何回かやっていれば、そのうちにできるようになる！」と自信をもって進めてもらえば大丈夫ですよ。頑張ってください。

【(１) の解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n} \log\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \log\left\{\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right\} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした！} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \log\left\{\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \log\left\{\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{\log(k+1)^2 - \log k(k+2)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{2\log(k+1) - \log k(k+2)\} \quad \blacktriangleleft \log(k+1)^2 = 2\log(k+1) \text{ より} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) + \log(k+1) - \log k(k+2)\} \quad \blacktriangleleft 2\log(k+1) = \log(k+1) + \log(k+1) \text{ より} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) + \log(k+1) - \log k - \log(k+2)\} \quad \blacktriangleleft \log k(k+1) = \log k + \log(k+1) \text{ より} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\{\log(k+1) - \log k\} + \{\log(k+1) - \log(k+2)\}\Big) \quad \blacktriangleleft \text{シグマの中身の順番を入れ替えた！} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \{\log k - \log(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) - \log(k+2)\} \\
&= -\{(\log 1 - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 4}) + \cdots + (\cancel{\log n} - \log(n+1))\} \\
&\qquad + \{(\log 2 - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 5}) + \cdots + (\cancel{\log(n+1)} - \log(n+2))\} \\
&= -\{\log 1 - \log(n+1)\} + \log 2 - \log(n+2) \\
&= \log(n+1) + \log 2 - \log(n+2) \\
&= \log\frac{2(n+1)}{n+2} \\
&= \log\frac{2n+2}{n+2} = (\text{右辺}) \text{（証明終）}
\end{aligned}
$$

【(２) の解答】

＊（１）さえできていたら簡単です。単に付け足しただけの問題です。受験問題では、こういう出題のされ方も多いので、気を付けるようにしてください。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \log\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\} \quad \blacktriangleleft \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ より！}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n+2}{n+2} \quad (\because \ (1))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} \quad \blacktriangleleft \text{対数の分母分子を } n \text{ で割った！}$$

$= \mathbf{\log 2}$

今回の問題は、（１）ができるかどうかがすべての問題です。

（１）のシグマの問題は、互いに打ち消し合う形に強引に変形できるかどうかがポイントです。

（１）は、範囲としては数学 B の数列です。ただ、数学 B の問題でこういった強引に変形をする問題は、あまり出てきません。

出題されるときは、今回のように出題範囲が数学 III のときです。

理系の人も、数学 III の受験問題を解くまではこういった問題はあまり解いたことがないという人が多いです。だから、みなさん苦手にしています。

こういうタイプの問題は、式変形が強引で「気づきにくい」と思うこともあるかもしれません。ただ、解法が決まっています。そのことを頭にいれておけば、式変形に気づけるようになりますよ。

ぜひとも、こういうタイプの問題を解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司