
問題

次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ であることを示せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}\,dx = 0$$

【（１）の解説】

こういう x を含んだ不等式の証明は、微分をして証明するよね。今回のものは、簡単そうですが、少し難しいですよ。しっかりと解けるようになっておいてくださいね。

また、別解として凸性を使った証明法を紹介します。これは知らない人も多いと思います。ただ、難関大学ではたまに出てきます。知識として頭にいれておいてください。

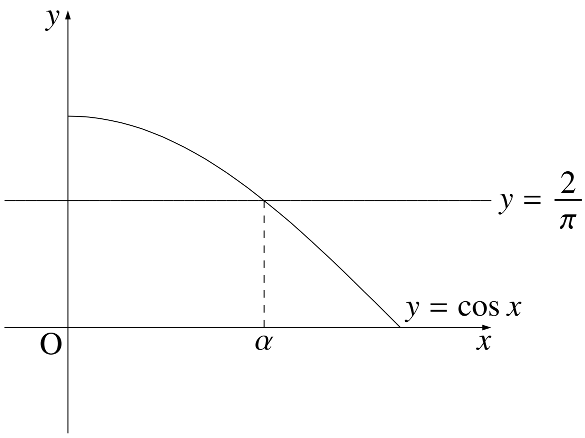
【（１）の解答】

$f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ とする。

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

＊ここからは $f'(x)$ の符号を調べていきます。$f'(x)$ の符号を調べるとき $f'(x)=g(x)-h(x)$ として、２つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の上下関係で調べていきます。意外に知らない人が多いですが、便利な解法です。覚えておいてくださいね。



⇑ 曲線 $y=\cos x$ と直線 $y=\dfrac{2}{\pi}$ の交点の x 座標の具体的な値は分かりません。だから、とりあえず α としました。

$0<x<\alpha$ では $y=\cos x$ のグラフの方が $y=\dfrac{2}{\pi}$ のグラフより上側にあるので、$\cos x>\dfrac{2}{\pi}$ つまり $\cos x-\dfrac{2}{\pi}>0$ で $f'(x)>0$ です。$\alpha<x<\dfrac{\pi}{2}$ ではグラフの上下関係が逆になるので $f'(x)<0$ です。

このように２つのグラフの上下関係で考えると $f'(x)$ の符号を簡単に調べられることがあります。重要な解法なので、しっかりと覚えておいてください。

$$f(0)=\sin 0-\frac{2}{\pi}\cdot 0=0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1-1=0$$

よって、増減表は以下のようになる。

x	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

⇑ $f(\alpha)$ の値を求める必要はないですよ。増減表より最小値が 0 つまり $f(x)\geqq 0$ というこ

とがわかります。

問題を解いているときに、「えっ、求められないけど大丈夫？」と思うことがあります。
ただ、設問はうまい具合に作ってくれています。

今回もそうだったけど、求められなくてもうまい具合に問題が解けるように作ってくれていますよ。落ち着いて解くようにしてくださいね。

増減表より、$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(x) \geqq 0$ つまり $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ が成立する。（証明終）

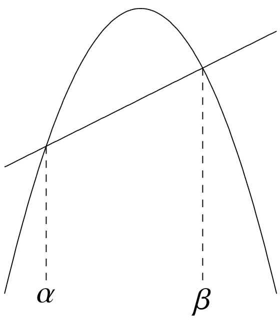
【（１）の別解の解説】

凸性については理解しているかな？まず、以下のことを覚えておいてくださいね。

凸性について

$f''(x) > 0$ のとき、関数 $f(x)$ は下に凸である。

$f''(x) < 0$ のとき、関数 $f(x)$ は上に凸である。



上図は、上に凸な関数と直線のグラフを描いたものです。$\alpha < x < \beta$ のとき、上に凸な関数のグラフの方が直線よりも上側にあるよね。

これは、証明なしで使ってもらっていいですよ。それでは、これを使った解答に進みます。

【（１）の別解の解答】

$f(x)=\sin x$ とする。$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x$ である。$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f''(x)<0$ であるので、曲線 $y=f(x)$ は、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき上に凸である。

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{\pi}$ で方程式 $\sin x=\dfrac{2}{\pi}x$ を解くと $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ である。
＊ちょっと、この方程式の解が $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ であることはわかりにくいかもしれません。ですが、実際に代入してみると $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ が解であるということがわかりますよ。

今回２つのグラフの関係より、交点は２つです。また、$y=\sin x$ のグラフも $y=\dfrac{2}{\pi}x$ のグラフも簡単にかけるので、方程式の解がこうなることは予想できると思います。

よって、曲線 $y=\sin x$ と直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ の交点の x 座標は $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ である。

以上より、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において、$\sin x\geqq\dfrac{2}{\pi}x$ がいえる。（証明終）
⇑ ２つのグラフを解答欄に書いておいてもいいです。ただ、２階微分をして上に凸ということを明言しているので、グラフを描かなくても満点をもらえます。

【（２）の解説】

当然（１）の結果を使って解いていきます。

（１）で不等式が与えられているよね。こういうふうに不等式が与えられていて極限が出てきたら、まず間違いなくはさみうちの原理を使って解く、と思ってもらって大丈夫ですよ。

（１）の結果を使って、被積分関数の $e^{-n\sin x}$ の不等式を作っていきます。

（１）より $\sin x\geqq\dfrac{2}{\pi}x$ です。両辺に $-n$ をかけます。すると、$-n\sin x\leqq-\dfrac{2n}{\pi}x$ です。

さらに e^x は増加関数なので、$e^{-n\sin x}\leqq e^{-\frac{2n}{\pi}x}$ が成立します。
⇑e^x は増加関数です。増加のとき、x の値が大きいほど e^x の値も大きくなります。

だから $f(x)\leqq g(x)$ のとき、$e^{f(x)}\leqq e^{g(x)}$ も成立します。

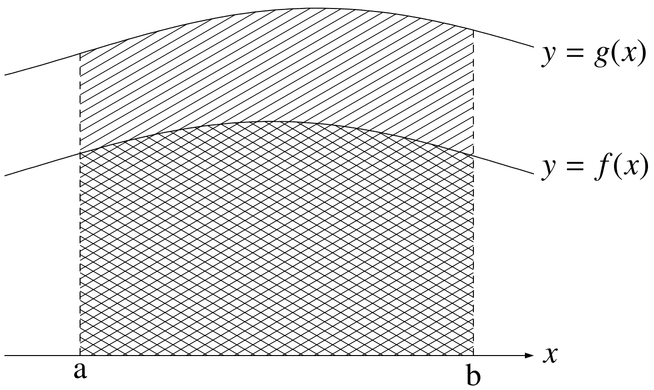
ここから、以下の性質を使います。

定積分と不等式の性質

$a \leqq x \leqq b$ において、常に $f(x) \leqq g(x)$ が成立するとき、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ が成立する。

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ の等号が成立するのは、$a \leqq x \leqq b$ において常に $f(x) = g(x)$ のときである。

上記が成立することは、$f(x)$ と $g(x)$ が常に正だったら面積を考えたらすぐに分かると思います。



$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq g(x)$ のとき、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ の面積は上図のようになります。面積を考えると、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ となっているのは明らかだよね。

また、等号成立は上図の面積が等しくなるときです。それは、$a \leqq x \leqq b$ においてつねに $f(x) = g(x)$ が成立しているときにしかなりません。

今は、説明を簡単にするために $f(x), g(x)$ がともに、常に 0 以上となる関数を選びました。ですが、$f(x)$ や $g(x)$ はどんな関数でも成立しますよ。証明は少しややこしいので省略しておきます。

【こういった問題の注意点】
さっき、「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) = g(x)$ のとき」に等号が成立するといったよね。

もし、常に $f(x) = g(x)$ でなければ $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ と不等式からイコールを外したくなります。ただ、別に $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ でも数学的には間違ったことをしていません。

$A \leqq B$ とは「$A < B$ または $A = B$」と同値です。だから、もし $A = B$ となることはなくても $A \leqq B$ と記しても間違いではありません。

今回の問題の場合は少し違います。ただ、等号が成立することがないにもかかわらず、問題文で「$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ を示せ」となっていることが少なくありません。そんな場合、$f(x) \leqq g(x)$ より、$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ が成立する、と答案用紙に書いておくだけで大丈夫です。

また、証明する式が「$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$」の場合、$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) = g(x)$ ではないということが言えれば OK なんだよね。

そんなとき、ひとつでも等号が成立していない例を挙げれば常に等号が成立している訳ではないといえたことになります。

その例をひとつあげておけば解答として、十分ですよ。
⇑ 分かりにくい表現でごめんなさいね。具体的な問題で話していくことにします。

例えば、$\int_0^1 x^2\,dx < \int_0^1 x\,dx$ を示すことにするね。
⇑ 右辺も左辺も定積分の計算をすることはできます。でも、定積分をしないで示していきます。$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2 \leqq x$ が成立するので、それを使って示していきます。
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、$x^2 \leqq x$ が成立する。

$f(x) = x^2, g(x) = x$ とする。$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \neq g\left(\frac{1}{2}\right)$ である。よって、「$0 \leqq x \leqq 1$ において常に $f(x) = g(x)$ となることはない」

$\cdots(\ast)$。
⇑ $x = \dfrac{1}{2}$ を選んだのは計算がラクそうだからです。別に $x = \dfrac{1}{2}$ でなくても等号が成立しないものだったら何を選んでも OK です。こういうふうに、$f(c) \neq g(c)$ となるような c が１個でも存在したら、$f(x)$ と $g(x)$ が常に等しいことを否定したことになります。

$$x^2 \leqq x$$

$$\int_0^1 x^2\,dx < \int_0^1 x\,dx \quad (\because(\ast))$$
⇑ 常に等しい訳ではないので、定積分をすると等号が外れる!!

ちょっと長かったけど、問題に戻るね。

問題は、$e^{-n\sin x} \leqq e^{-\frac{2n}{\pi}x}$ の不等式を作っていました。これから、定積分をとります。常に $e^{-n\sin x} = e^{-\frac{2n}{\pi}x}$ が成立する訳ではないよね。だから、定積分をとったら等号が外れます。

ただ、はさみうちの原理の場合、等号があってもなくてもどっちでもよかったんだよね。等号を外した場合、ちゃんと「常に等号が成立することはない」と説明をしておかないとダメなので面倒です。

だから、今回は等号を入れたままにしておくことにするね。

$e^{-n\sin x} \leqq e^{-\frac{2n}{\pi}x}$ で定積分をとると、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi}x}\,dx$ が成立します。

で、はさみうちの原理を使うには $A \leqq B \leqq C$ とはさまないといけないんだったんだよね。今回、右側の不等式は（１）の設問を使って求めました。

左側の不等式も作らないといけません。でも、これはごくごく簡単なことが多いよ。

＊片方が（１）が誘導でした。もう、一方は誘導問題はありません。ということは、「誘導がなくても気づけるくらい、簡単なもの」ということです。

左側には0をいれるて、$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi}x}\,dx$ が成立することは明らかだよね。それでは、解答に進みます。

【(２) の解答】

(１) より $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ が成立する。

$$\sin x \geqq \frac{2}{\pi}x$$

$$-n\sin x \leqq -\frac{2n}{\pi}x$$ ◀ 両辺に $-n$ をかけた！

$$e^{-n\sin x} \leqq e^{-\frac{2n}{\pi}x}$$ ◀ e^x は増加関数より！

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi}x}\,dx$$ ◀ 両辺を定積分した！

ここで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi}x}\,dx$$
$$=\left[-\frac{\pi}{2n}e^{-\frac{2n}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{\pi}{2n}e^{-\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2n}e^0$$
$$=-\frac{\pi}{2n}e^{-n}+\frac{\pi}{2n}$$

よって、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}dx \leqq -\frac{\pi}{2n}e^{-n}+\frac{\pi}{2n}\cdots①$ が成立する。

また、$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $e^{-n\sin x} > 0$ より、$\displaystyle 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}dx\cdots②$

⇑ $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) > 0$ のとき、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$ が成立します。面積で考えたら明らかだよね。

①, ② より $\displaystyle 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}dx < -\frac{\pi}{2n}e^{-n}+\frac{\pi}{2n}$

⇑ これではさみうちの原理を使える形になりました！

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$

⇑ 左辺の０は n を含んでいません。極限値も当然０です。この部分は書いても書かなくてもどっちもよいと思います。

また、$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ より、$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\pi}{2n}e^{-n} + \frac{\pi}{2n}\right) = 0$ となる。

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}\,dx = 0$ がいえる。（証明終）

定積分の不等式がらみの問題でした。この不等式と定積分の問題は実際の大学受験でも頻出ですよ。

「積分って、面積と体積が中心でしょ」なんて言う人がいます。でも、実際の大学受験では面積や体積の問題はあまり出題されません。

もちろん、出題されないことはないのですが、高校の教科書に載っているようなオーソドックスな問題は出題されにくいです。

今回の不等式と定積分の問題はよく出てきますよ。苦手にしている人が多い（というか、あまり詳しく勉強をしたことがない人が多い）ので、しっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法

https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司