「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)^2 + 1}\,dt$ を満たすとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を $f(x)$ で表せ。

(2) 関数 $\log\{f(x) + f'(x)\}$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

【（１）の解説】

数学 II で勉強をした

定積分を含んだ微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

上記の公式を使えば $f'(x)$ を求めることができます。また、今回の問題では使いませんが、数学 III では上記の公式を少し発展させたような

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

も出てきます。知らなかった人は覚えておいてくださいね。

【（１）の解答】

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{f(t)^2+1}\,dt$$

$f'(x)=\boldsymbol{\sqrt{f(x)^2+1}}$ ◀ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ の公式より！

＊上記の公式の使い方がわからないという人がいます。でも、簡単ですよ。$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ とは、左辺の被積分関数（インテグラルの中身の関数）の t を x にしたらいいだけです。

例えば、$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (3t^3+2t+5)\,dt$ なら、被積分関数の $3t^2+2t+5$ の t を x にして $3x^2+2x+5$ としたらいいだけですよ。

だから、今回も同じです。被積分関数の $\sqrt{f(t)^2+1}$ の t を x に置き換えたら $\sqrt{f(x)^2+1}$ となるので、これが $f(x)$ を微分したものです。

$$f'(x)=\left\{f(x)^2+1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$f''(x)=\dfrac{1}{2}\left\{f(x)^2+1\right\}^{\frac{1}{2}-1}\cdot\{f(x)^2+1\}'$ ◀ $(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ の合成関数の微分の公式より！

$$=\frac{2f(x)\cdot f'(x)}{2\sqrt{f(x)^2+1}}$$

$$=\frac{2f(x)\cdot f'(x)}{2f'(x)}\quad(\because\ \ f'(x)=2\sqrt{f(x)^2+1})$$

$$=\boldsymbol{f(x)}$$

【（２）の解説】

受験問題で（１）、（２）… となっていたら（２）を解くときに（１）を使うことが多かったんだよね。

もちろん、１００パーセント使うとは限らないよ。たまに、使わないこともあります。

ただ、（１）、（２）と見た瞬間に「前問の結果を使って解いていく可能性が高い」と気づけるようになっておいてください。

このことを踏まえた上で、今回の問題どうしようかな？と思うんだけど、とりあえず

$\log\{f(x)+f'(x)\}$ を微分してみることにするね。

「どうして、$\log\{f(x)+f'(x)\}$ を微分するの？」と思うよね。もちろん、これ単独ではなかなか気づきにくいです。でも、（１）で $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めたんだよね。ということは、$f'(x)$ と $f''(x)$ を使う可能性が高いです。

そこで、もう一度問題を見てみると、今回は $\log\{f(x)+f'(x)\}$ が与えられています。これを微分したら $f'(x), f''(x)$ を含んだものになります。これで、（１）の結果を使えるのかな？という考えで、思いつきました。それでは、解答に進みます。

【（２）の解答】

$F(x) = \log\{f(x)+f'(x)\}$ とする。

$$F'(x) = \frac{\{f(x)+f'(x)\}'}{f(x)+f'(x)}$$ ◀ $\{\log f(x)\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の公式より！

$$= \frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}$$

$$= \frac{f'(x)+f(x)}{f(x)+f'(x)} \quad (\because \text{（１）より } f''(x) = f(x))$$

$= 1$ ◀ 分母分子同じなので約分をした！

＊これまでで $F'(x)$ が求まりました。ここから $F(x)$ を求めるためには $F'(x) = 1$ で両辺を積分すれば OK です。当然 $F(x) = x + C$ （C は積分定数) です。あとは、積分定数 C の値が求まれば OK です。$F(0)$ の値は求められるので、これを利用して解いていきます。

$f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)^2+1}\,dt$ より $f(0) = 0$ ですよ。$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ のように積分区間の上下が同じとき、定積分の値が 0 となります。

$F'(x) = 1$ より $F(x) = x + C$ （C は積分定数) となる。

$f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)^2+1}\,dt$ より $f(0) = 0$ である。

⇑ 積分区間の上下が同じ値のとき、定積分の値は 0 になる！

$f'(x) = \sqrt{f(x)^2+1}$ より、

$f'(0) = \sqrt{f(0)^2 + 1} \;=\; \sqrt{0^2 + 1}$ $(\because \;\; f(0) = 1)$
$= 1$

$F(0) = \log\{f(0) + f'(0)\}$ ◀ $F(x) = \log\{f(x) + f'(x)\}$ に $x = 0$ を代入した！
$= \log(0 + 1)$ $(\because \;\; f(0) = 1, f'(0) = 1)$
$= \log 1$
$= 0$

$F(x) = x + C$ より、$x = 0$ のとき $F(0) = 0 + C$ つまり $C = 0$ となる。

以上より、$F(x) = \log\{f(x) + f'(x)\} = \boldsymbol{x}$ となる。

【（３）の解説】

「$f(x)$ を求めよ」です。どうするのか分かりにくいけど、とりあえず（１）や（２）の結果を使って解いていきそうだよね。

（２）で $\log\{f(x) + f'(x)\} = x$ であることがわかりました。この式より、$f(x) + f'(x) = e^x$ です。

今回は $f(x)$ を求めよなんだよね。（１）で $f'(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}$ と求めていました。これを $f(x) + f'(x) = e^x$ に代入して、$f(x)$ の方程式を解くようにすれば $f(x)$ を求めることができます。

で、これで今回の問題は終了です。ただ、方程式を解くときに少し注意することがあります。それを説明しておきます。

補題

方程式 $\sqrt{x + 2} = x$ を解け。

【補題の有名な誤答】

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x+2 = x^2$$ ◀ 両辺を 2 乗した！

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = \mathbf{-1, 2}$$

上記は、典型的な誤答例なんだけど、どこを間違えているか分かる？間違えている箇所は、両辺を 2 乗したところです。

2 乗したら間違えという分けではないのですが、同値性を無視して解いているので、注意が必要です。

$\sqrt{x+2} = x \Rightarrow x+2 = x^2$ は真だけど、$x+2 = x^2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = x$ は真ではないよ。

今回は $x \geqq -2$ のもとで考えているとします。$x+2 = x^2$ を解くと $x = \pm\sqrt{x+2}$ となるよね (例えば $x^2 = 2$ を解くと $x = \pm\sqrt{2}$ と $\pm$ が付くのと同じです)。

だから、（$x \geqq -2$ のもとで）$x+2 = x^2$ であることは（$x = \sqrt{x+2}$ または $x = -\sqrt{x+2}$）であることと同値です。

2 乗したところで同値性が崩れています。上記の答案は必要条件で解いていっていることになります。だから、$x = -1, 2$ は方程式の解であるための必要条件です。十分性を確認する必要があります。

「どうやって十分性を確認するのかな？」なんて思う人もいます。でも簡単ですよ。元の方程式 $\sqrt{x+2} = x^2$ に代入をして、この等式を満たしているものが答えです。

ちなみに、$x = -1$ のとき $\sqrt{x+2} = 1, x = -1$ となって左辺と右辺が等しくないので、$x = -1$ は方程式の解ではありません。$x = 2$ のとき $\sqrt{x+2} = 2, x = 2$ より両辺が等しくなるので、$x = 2$ が方程式の解です。

上記のように、必要条件で解いたあと十分性を確認するという方法で解いてもらってもOKです。ただ、今回のような $\sqrt{A} = B$ の形をしているときは有名な同値変形があるので、そちらを利用した方がすっきりとした答えが書けると思います。

有名な同値変形

$$\boldsymbol{\sqrt{A} = B \iff A = B^2 \text{ かつ } B \geqq 0}$$

$\sqrt{A} = B \iff A = B^2$かつ $B \geqq 0$

上記で「$\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2$かつ $B \geqq 0$」が真であることは簡単に分かると思います。逆の

「$\sqrt{A} = B \Leftarrow A = B^2$かつ $B \geqq 0$」ですが、$A = B^2$ を解くと $B = \pm\sqrt{A}$ です。ただ、「かつ $B \geqq 0$」があるので $B = -\sqrt{A}$ の方は不適になるので、$B = \sqrt{A}$ だけになります。

よって、「$\sqrt{A} = B \Leftarrow A = B^2$かつ $B \geqq 0$」も真です。

それでは、先ほどの方程式をこの同値変形を使って解いていってみます。

【補題の解答】

$\sqrt{x+2} = x$ であることと、$x + 2 = x^2 \cdots$ ① かつ $x \geqq 0 \cdots$ ② であることは同値である。

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x + 2 = x^2$$ ◀ 両辺を 2 乗した！

① より
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$
$$x = -1, 2$$

＊今回は ① と ② の両方とも満たさないといけません。現時点で求まった x は ① を満たすものです。ここから、② を満たしているかということを確認していきます。

$x = -1$ は ② を満たさないので不適。$x = 2$ は ② を満たすので適する。

以上より、方程式の解は $x = \mathbf{2}$ である。

まあ、この方程式を解くときの答案はもう少し省略したものでも大丈夫です。ただ、丁寧に答案を書くとしたら上記のようになります。

ここまで来たら、今回の（３）の解答に進んでも大丈夫なので（３）に進みます。

【(３）の解答】

（２）より $\log\{f(x)+f'(x)\}=x$ である。よって、$e^x=f(x)+f'(x)$ が成立する。

また、（１）より $f'(x)=\sqrt{f(x)^2+1}$ である。これを $e^x=f(x)+f'(x)$ に代入をすると $e^x=f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}$ つまり $\sqrt{f(x)^2+1}=e^x-f(x)$ が成立する。

「$\sqrt{f(x)^2+1}=e^x-f(x)$」であることは、「$f(x)^2+1=\{e^x-f(x)\}^2\cdots$①かつ $e^x-f(x)>0\cdots$②」であることと同値である。
$\sqrt{A}=B \iff A=B^2$ かつ $B\geqq 0$ の同値変形より !!

①より

$$f(x)^2+1=\{e^x-f(x)\}^2$$
$$f(x)^2+1=e^{2x}-2e^xf(x)+f(x)^2$$
$$2e^xf(x)=e^{2x}-1$$

$2e^x>0$ より両辺を $2e^x$ で割ると

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

＊あとは②を満たしているか確認をして終了です。

$$\begin{aligned} e^x-f(x)&=e^x-\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\\ &=\frac{2e^{2x}-e^2x+1}{2e^x}\\ &=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}>0 \end{aligned}$$

よって、$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ のとき②も満たしている。

以上より、$f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$

今回の問題は、受験レベルからしたらごくごく標準的なものです。でも、同値変形も出てきたし、しっかりとこのあたりまで考えることは少し難しかったかもしれません。

普段、問題を解くときも漫然と解くのではなく、「なぜ、こうやった解くのか？」や「本当にこの解き方で正しいのか？」ということを自問しながら解くようにしてください。

そうすると、次第に数学の力が上がっていきますよ。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司