「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

実数全体で定義され、$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ の最小値が２であるとする。
(1) $e^{2x} - e^{-2x}$ の不定積分を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ を求めよ。

【（１）の解答】

$$\int (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C}$$（C は積分定数）

＊上記の積分が分からないという人は、微分で確認をするようにしてください。$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ の公式より、$(e^{2x} + 2^{-2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' + e^{-2x} \cdot (-2x)' = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ より、上記の積分が成立しているということが確認できますよ。

積分で分からなくなった場合、微分に戻ったらいいですよ。

【（２）の解説】

パッと見た感じは、「簡単そうかな？」と思えるのですが、意外に難しいです。いろいろな知識が必要になってきます。

一度で解けるようになることは難しいかもしれません。何度も解きなおして、自分一人

だけの力で解けるようになっておいてください。

それでは、問題に進みます。問題自体は、「関数 $f(x)$ を求めよ」なんだけど、何をしたらよいかよくわからないよね。

ただ、（１）の結果を使うのかな？という想像はつくよね。
⇑ 受験問題で、（１）、（２）となっているときは（２）を解くとき（１）を利用することが多いです。

で、あらためて（１）を見てみると、（１）は $e^{2x} - e^{-2x}$ を積分しました。

さらに、問題を見てみると $f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ が与えられています。これを利用して解いていきそうです。

$f(x)f'(x)$ の右辺の $e^{2x} - e^{-2x}$ を積分したものを（１）で求めています。だから、同じように左辺の $f(x)f'(x)$ も積分をします。ここで、この積分は以下の公式を使います。

特殊な積分の公式について

$$\boldsymbol{\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C}$$

上記ですが、なぜ成立するか分からないという人がいます。でも、簡単ですよ。$\{f(x)\}^{n+1}$ を微分したら、合成関数の微分の公式より $(n+1)\{f(x)\}^n \cdot f'(x)$ となるよね。

これより、$\displaystyle\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ が成立しているということが理解できたと思います。

＊上記の $\displaystyle\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式は、大学受験では超が付くくらい頻出です。

被積分関数が積のときは、まずこの公式を使えるかどうか確認をして解いていきます。この公式が使えないとわかってから、別の解法、例えば部分積分や置換積分を使うのかな？と考えていきます。

とにかく、この公式は超頻出ということを覚えておいてください。

$\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C$ となります。

⇑ $\int \{f(x)\}^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式で $n = 1$ のとき

このことより、$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ の両辺を不定積分すると、

$\int f(x)f'(x)\,dx = \int (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$ です。

よって、$\frac{1}{2}\{f(x)\}^{n+1} + C_1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2$ です。

⇑ 不定積分がふたつあります。積分定数が同じ C だとまずいので、C_1, C_2 としました。

【積分定数の表記の仕方について】

例えば $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ と変形できます。

このことより $\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + C + \sin x + C = -\cos x + \sin x + 2C$ なんて書く人がいます。でも、これは正しくないですよ。

そもそも、積分定数とは例えば $\frac{1}{2}x^2 + C$ で C が定数ならばどんな数であったとしても、微分をしたら x となってくれます。だから、C にはどんな実数が入ってもいいですよ、ということです。

上記の場合、$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ とふたつの C がありました。これらのふたつの C のところには、どんな数字が入っても OK です。だから、２つの C が等しいこともあるかもしれません。ですが、違う場合も OK です。

⇑ 積分定数とは、積分定数のところにどんな数字が入っても OK ですよ、ということです。例えば、$\int x\,dx = \frac{1}{x}x^2 + C$ です。$\frac{1}{2}x^2 + C$ は、C がどんな値であったとしても微分をしたら x になってくれるよね。だから、積分定数は任意の定数と同じ意味です。

だから、こういうふうに不定積分が複数あるときは $\int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C_2$ などと積分定数を分けてかきます。

また、$\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + C_1 + \sin x + C_2 = -\cos x + \sin x + C_1 + C_2$ となります。ですが、C_1 と C_2 は実数であればどんな数がきても OK です。$C_1 + C_2$ をひとつにまとめます。例えば、$C_1 + C_2 = C$ として $-\cos x + \sin x + C_1 + C_2 = -\cos x + \sin x + C$ のように書くことが多いですよ。

それでは、解説に戻ります。

$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C_1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2$$
$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2 - C_1$$
$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C \blacktriangleleft C_2 - C_1 = C \text{ とした！}$$

やっと、ここまできました。で、ここからは積分定数の C の値が求まったら、$f(x)$ も求めることができます。

C の値をどうやって求めようかな？と考えます。そこで、問題を見返してみると、「関数 $f(x)$ の最小値が２」という条件をまだ使っていないよね。

数学の問題では与えられた条件をすべて使って解いていきます。だから、「ここからどうしよう？」なんて行き詰ったときは、「まだ使っていない条件はないかな？」と丁寧に問題を見返すようにしてください。

今までの段階で「関数 $f(x)$ の最小値が２」を使うということがわかりました。最小値が２を使うためには、「増減表を書けばいいのかな？」と気づけるようになってくださいね。

増減表を書くには、$f'(x)$ の符号を考える必要があるので、$f'(x)$ の符号を考えていくことにします。

$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ が問題で与えられていました。これを使って $f'(x)$ の符号を考えていきます。今、問題文で $f(x)$ の最小値が 2 と与えられているよね。ということは当然 $f(x) > 0$ です。

$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ から $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{f(x)}$ と変形できます。$f(x) > 0$ より、$f'(x)$ は分子の $e^{2x} - e^{-2x}$ の符号と一致します。
⇑微分をして知りたいのは、$f'(x)$ の符号だけです。そのことに気を付けて解いていくようにしてくださいね。

ここまできたら大丈夫だと思うので、解答に進みます。

【（２）の解答】
$\displaystyle\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C_1 \cdots ①$ （C_1 は積分定数)。

また、（１）より $\displaystyle\int (e^{2x} - e^{-2x})\,dx = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2 \cdots ②$ （C_2 は積分定数)
$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ より、$\displaystyle\int f(x)f'(x)\,dx = \int (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$ となる。

$$\int f(x)f'(x)\,dx = \int (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$$
$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C_1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2 \quad (\because \ ①, ②)$$
$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C_2 - C_1$$

ここで、$C_2 - C_1 = C$ とすると、$\displaystyle\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C \cdots ③$ となる。

$f(x)$ の最小値が 2 であることより $f(x) > 0$ である。

$f(x)f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ の両辺を $f(x)$ で割ると、$f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{f(x)}$ となる。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{f(x)} \\
&= \frac{e^{-2x}(e^{4x} - 1)}{f(x)} \\
&= \frac{e^{-2x}(e^{2x} + 1)(e^{2x} - 1)}{f(x)} \\
&= \frac{e^{-2x}(e^{2x} + 1)(e^{x} + 1)(e^{x} - 1)}{f(x)}
\end{aligned}
$$

ここで $e^{-2x}(e^{2x} + 1)(e^x + 1) > 0,\ \ f(x) > 0$ より $f'(x)$ の符号は $e^x - 1$ の符号と一致する。

∗少し考えたらわかるけど、$e^x - 1$ は $x < 0$ のとき負となり $x > 0$ のとき正となるよ。これで、増減表をかけます。

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、$x = 0$ のとき極小かつ最小となる。最小値が 2 であるので、$f(0) = 2$ である。

⇑ これで、③ の $\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \dfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C$ で $f(0) = 2$ を使えば積分定数の C が求まりますよ。

③ で $x = 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{f(0)\}^2 &= \frac{1}{2}(e^0 + e^0) + C \\
\frac{1}{2}\cdot 2^2 &= \frac{1}{2}\cdot 2 + C \quad (\because \quad f(0) = 2) \\
2 &= 1 + C \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

$C = 1$ を ③ に代入する

$$\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + 1$$

$$\{f(x)\}^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$$ ◀ 両辺に 2 をかけた！

$$= (e^x + e^{-x})^2$$ ◀ $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ より

$\{f(x)\}^2 = (e^x + e^{-x})^2$ より、$f(x) = \pm(e^x + e^{-x})$ となる。

$f(x) > 0$ より、$f(x) = \boldsymbol{e^x + e^{-x}}$ である。

今回の問題はどうだったでしょうか？ひとつずつやっていることとしては、それほど難しくありません。

ただ、答えにたどりつくまでにはいろいろなことをしないといけないことが多く大変だったと思います。

入試問題の中でも、解きにくい問題だったかもしれません。ただ、理系の国立大学を目指すのならこのくらいのレベルの問題を難なく解けるようになっておいて欲しいです。

一度では、難しいです。自分一人だけの力で解けるようになるまで、何度も繰り返してください。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司