「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $a_n < n$ を数学的帰納法によって証明せよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{n}{n - a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(5) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ および $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_2a_3a_4\cdots a_n}{n!}$ を求めよ。

【（１）の解答】

＊これはよく出る数学的帰納法の問題です。漸化式の数学的帰納法は受験で頻出なのでしっかりと理解しておいてください。

$a_n < n \cdots ①$ を示す。

(i) $n = 1$ のとき
$a_1 = 0$ より $a_1 < 1$ つまり $a_1 < 1$ が成立する。よって、$n = 1$ のとき、① が成立する。

(ii) $n = k$ のとき、① が成立すると仮定する。つまり、$a_k < k \cdots ②$ が成立する。

＊これからは、$n = k+1$ のとき ① つまり $a_{k+1} < k+1$ であることを示します。

これを示すには $(k+1) - a_{k+1}$ が 0 より大きいことを示せばいいんだよね。a_{k+1} は $a_{n+1} = \dfrac{2n(n+1)}{3n - a_n}$ で n を k に置き換えると出てきますよ。

たまに「この式変形して OK なの？」と質問を受けます。でも、大丈夫ですよ。$a_{n+1} = \dfrac{2n(n+1)}{3n - a_n}$ はすべての自然数 n で成立する式です。n のところは自然数であれば何がきても OK です。今回 k は自然数なので、n のところに k がきても OK ですよ。

$$(k+1) - a_{k+1}$$

$$= k + 1 - \frac{2k(k+1)}{3k - a_k}$$

＊不等式の証明で分数がきたら通分をするくらいしかないので、とりあえず通分します。

$$= \frac{(k+1)(3k - a_k) - 2k(k+1)}{3k - a_k}$$ ◀ 通分をした！

$$= \frac{3k^2 - ka_k + 3k - a_k - 2k^2 - 2k}{3k - a_k}$$

$$= \frac{k^2 + k - ka_k - a_k}{3k - a_k}$$

$$= \frac{k(k+1) - a_k(k+1)}{3k - a_k}$$

$$= \frac{(k+1)(k - a_k)}{3k - a_k}$$ ◀ 分子は因数分解をした！

ここで、k は自然数であるので $k+1 > 1$、また ② より $k - a_k > 0$ であるので、分子の $(k+1)(k - a_k)$ は正となる。

また、分母の $3k - a_k$ は、$3k - a_k = 2k + (k - a_k)$ と変形できる。$2k > 0, k - a_k > 0$ ($\because$ ②) より分母の $3k - a_k$ は正である。

分母分子ともに正であるので、$\dfrac{(k+1)(k - a_k)}{3k - a_k} > 0$ となるので、$k+1 > a_{k+1}$ が言える。
よって、① は $n = k+1$ のときも成立する。

以上より、すべての自然数 n において ① が成立する。（証明終）

＊上記の式変形で因数分解が出てきました。積の形にしたら符号が分かることが多いです。だから、こういうふうに不等式の証明や、また、微分などで符号を知りたいときに

因数分解できることが多いです。

今回の問題はそこまで複雑なものではありませんでした。だから、因数分解が気づけた人も多いと思います。でも、複雑なものになればパッと見では気づけないこともあります。そんなとき、「因数分解することも」ということを頭に入れて考えたら気づけるようになります。

【(２) の解説】

$b_n = \dfrac{n}{n - a_n}$ となっています。最悪、この式を a_n について解いて $a_n = \dfrac{(b_n - 1)n}{b_n}$ となります。これより、$a_n = \dfrac{(b_n - 1)n}{b_n}$ と $a_{n+1} = \dfrac{(b_{n+1} - 1)(n+1)}{b_{n+1}}$ を $a_{n+1} = \dfrac{2n(n+1)}{3n - a_n}$ に代入すると、この問題を解くことができます。

ですが、こういった問題は代入する方法はメンドウなことが多いです。そこで、b_{n+1} が出てくるように強引に変形します。

b_{n+1} の方しか意識していません。ですが、こういうふうに解くと残った部分もうまい具合に b_n が出てくる形になってくれます。

誘導は問題がうまいぐあいに解けるように作ってくれています。だから、片方だけでもあわせる方向で考えると残った部分もうまくいくようになっています。

こういう問題を解くときのポイントですよ。覚えておいてくださいね。ただ、この解法はまれに気づきにくいことがあります。

そんなときは、最初に書いた代入する方法で解いてもらってもいいですよ。少しメンドウですが、必ず解くことができます。

【(２) の解答】

$a_{n+1} = \dfrac{2n(n+1)}{3n - a_n}$

＊上記の式を変形して左辺を強引に b_{n+1} の形にします。うまい具合にできていた、右辺は b_n のみの式になってくれますよ。

$$a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n-a_n}$$

$$-a_{n+1} = -\frac{2n(n+1)}{3n-a_n}$$ ◀ 両辺に -1 をかけた！

$$(n+1)-a_{n+1} = (n+1)-\frac{2n(n+1)}{3n-a_n}$$ ◀ 両辺に $n+1$ を加えた！

$$= \frac{(n+1)(3n-a_n)-2n(n+1)}{3n-a_n}$$ ◀ 右辺を通分した！

$$= \frac{(n+1)\{(3n-a_n)-2n\}}{3n-a_n}$$

$$= \frac{(n+1)(n-a_n)}{3n-a_n}$$

＊左辺を b_{n+1} にするためには、ここから両辺の逆数をとりたいです。ただ、$A=B$ の逆数をとるとき、$A=B=0$ だと逆数をとることができません。$A \neq 0, B \neq 0$ であることを確認しておかないとダメです。ここは、（１）の結果より、０でないことをいえます。

ここで、（１）よりすべての自然数 n において $a_n < n$ が成立するので $(n+1)-a_{n+1} > 0$ となるので、左辺は 0 ではない。同様に右辺も 0 ではない。

$(n+1)-a_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-a_n)}{3n-a_n}$ の両辺の逆数をとる。

$$\frac{1}{(n+1)-a_{n+1}} = \frac{3n-a_n}{(n+1)(n-a_n)}$$

$$\frac{n+1}{(n+1)-a_{n+1}} = \frac{3n-a_n}{n-a_n}$$ ◀ 両辺に $n+1$ をかけた。これで左辺が b_{n+1} になった！

$$= \frac{n-a_n+2n}{n-a_n}$$ ◀ 右辺を変形した！少しずつ a_n が出てくる形に変形！

$$= \frac{\cancel{n-a_n}}{\cancel{n-a_n}} + 2\cdot\frac{n}{n-a_n}$$

$$= 1+2\frac{n}{n-a_n}$$

$$\therefore \boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 1}$$

【(３）の解答】

＊この問題は、非常に簡単な漸化式の問題です。なお、漸化式が分からないという人は、以下のプリントを勉強してください。

漸化式に関しては、以下のプリントだけで完璧ですよ。

漸化式の解説プリント：https://hmg-gen.com/zenkasiki.pdf

$b_1 = \dfrac{1}{1-a_1} = \dfrac{1}{1-a_0} = 1$

$b_{n+1} = 2b_n + 1 \cdots ③$ とする。

特性方程式より $\alpha = 2\alpha + 1$。これを解くと $\alpha = -1$

よって、③ は $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ と変形できる。これより、数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$、公比 2 の等比数列である。

$$
\begin{aligned}
b_n + 1 &= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&= 2^n
\end{aligned}
$$

$b_n = \mathbf{2^n - 1}$

【（４）の解答】

$$
\begin{aligned}
b_n(n - a_n) &= n \\
nb_n - a_n b_n &= n \\
a_n b_n &= nb_n - n \\
a_n &= \frac{nb_n - n}{b_n} \\
&= \frac{n(b_n - 1)}{b_n} \\
&= \frac{n\{(2^n - 1) - 1}{2^n - 1} \quad (\because \quad b_n = 2^n - 1) \\
&= \boldsymbol{\frac{n(2^n - 2)}{2^n - 1}}
\end{aligned}
$$

【(５) のひとつめ $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\right)$ の解答】

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(2^n-2)}{2^n-1}}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2}{2^n-1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}} \quad \blacktriangleleft \text{分母分子を } 2^n \text{ で割った！}\\
&=\frac{1-0}{1-0}\quad \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\right)\\
&=\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

【(５) のふたつめ $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_2a_3a_4\cdots a_n}{n!}\right)$ の解説】

こういう問題はうまい具合に、打ち消し合うことが多いです。今回も、そのタイプの問題です。

少し、式変形が難しいですが、「打ち消し合うことが多い！」ということをあたまに入れて解いていけば気づけるようになります。

とりあえず、分子の $a_2a_3a_4\cdots a_n$ がややこしそうなので、この部分だけを見ていくことにします。

$$\frac{2(2^2-2)}{2^2-1}\cdot\frac{3(2^2-2)}{2^3-1}\cdot\frac{4(2^4-2)}{2^4-1}\cdots\frac{n(2^n-2)}{2^n-1}$$

で、上記の式をよくみると分子に $2,3,\cdots n$ があるけど、これを前にもってきます。

$$
\begin{aligned}
&\frac{2(2^2-2)}{2^2-1}\cdot\frac{3(2^3-2)}{2^3-1}\cdot\frac{4(2^4-2)}{2^4-1}\cdots\frac{n(2^n-2)}{2^n-1}\\
&=2\cdot3\cdot4\cdots n\times\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1} = n!\times\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}
\end{aligned}
$$

上記のように変形できます。$2\cdot3\cdot4\cdots n$ に 1 をかけても値が変わりません。だから、$2\cdot3\cdot4\cdots n=1\times2\cdot3\cdot4\cdots n=n!$ と変形ができるよね。今回の場合、$\frac{a_2a_3a_4\cdots a_n}{n!}$ だか

ら、これで分母分子を $n!$ で約分できます。

＊うまい具合に $n!$ で約分できる形になったよね。まあ、今回の問題に限った話ではないけど、こういうふうにうまい具合に進めた場合「ああ、ここまでの式変形はあっているんだな」とか「とりあえず、この解法でやってみたけど、この解き方で正解だな」と確認することができます。

数学って、解く前から「絶対にこの方法で解く！」と必ずしも気づけている訳ではありません。問題によっては、「よくわからないけど、この解法でいけそうだからとりあえずこの解法でやってみよう。うまく解けたら OK だし、うまくいかなければ、これ以外の解法で解いていかないといけないんだな」とそういう感じです。

そんなとき、うまいこと変形できたら、ほとんどの場合、その解法であっています。間違った解法で解いている場合、うまいこと変形できることは少ないですよ。

とりあえず $\dfrac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\dfrac{2^n-2}{2^3-1}\cdot\dfrac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\dfrac{2^n=2}{2^n-1}$ と変形することができました。

こういうタイプの計算は、「うまいこと打ち消しあうものができる」ことが多いです。今回も、うまいこと打ち消し合ってくれます。ただ、少し気付きにくい問題です。

少し気付きにくいですが、「打ち消しあわないかな？」と強く頭に入れて考えると気づけるようになりますよ。

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n=2}{2^n-1}\\
=&\frac{2(2-1)}{2^2-1}\cdot\frac{2(2^2-1)}{2^3-1}\cdot\frac{2(2^3-1)}{2^4-1}\cdots\frac{2(2^{n-1}-1)}{2^n-1}
\end{aligned}
$$

分子を 2 でくくりました。こうすると、左側の分数の分母と右側の分数の分子が同じ値になってくれます。この部分どうしを約分することができます。

繰り返しになるけど、少し気付きにくいですよ。ただ、「こうやって解くことが多い！」と頭に入れておけば気づけるようになってきます。頑張ってくださいね。それでは、解答に進みます。

【（５）のふたつめ$\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_2a_3a_4\cdots a_n}{n!}\right)$の解答】

$$
\begin{aligned}
&a_2a_3a_4\cdots a_n\\
=&\frac{2(2^2-2)}{2^2-1}\cdot\frac{3(2^3-2)}{2^3-1}\cdot\frac{4(2^4-2)}{2^4-1}\cdots\frac{n(2^n-2)}{2^n-1}\\
=&2\cdot3\cdot4\cdots n\times\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}\\
=&n!\times\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdots④
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_2a_3a_4\cdots a_n}{n!}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n!\times\dfrac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\dfrac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\dfrac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\dfrac{2^n-2}{2^n-1}}{n!}\quad(\because\ ④)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot\frac{2^3-2}{2^3-1}\cdot\frac{2^4-2}{2^4-1}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2-1)}{\cancel{2^2-1}}\cdot\frac{2(\cancel{2^2-1})}{\cancel{2^3-1}}\cdot\frac{2(\cancel{2^3-1})}{\cancel{2^4-1}}\cdots\frac{2(\cancel{2^n-1})}{2^n-1}\right\}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\ \text{◀ 分子は}\,n-1\,\text{個の積です。２を}\,n-1\,\text{回かけるので、分子は}\,2^{n-1}\,\text{となる。}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\dfrac{1}{2^{n-1}}}\\
=&\frac{1}{2-0}\quad\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0\right)\\
=&\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

（４）までが数学 B の数列の問題で、（５）が極限の問題です。（４）までが数列ではありますが、数学 B までが試験範囲のときは、今回の問題のようなややこしい問題が出てくることは少ないです。

数学 III を勉強すると、こういうややこしい数列の問題が良く出題されます。慣れていない人にとってはやや難しかったかもしれません。ただ、よく出てきます。この問題を通して、しっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司