「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

曲線 $C\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ がある。C の曲線の長さ l を求めよ。

【問題の解説】

まず、以下のことを覚えておいてください。

曲線の長さの求め方

媒介変数表示 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $(a \leqq x \leqq b)$ で与えられる曲線の長さ l は

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

となる。

曲線の長さは上記の公式にあてはめるだけで解けてしまいます。ただ、定積分の計算について以下のことを覚えておいてください。

曲線の長さの定積分

曲線の長さの定積分はほとんどの場合、以下の２パターンのいずれかです。

① $\int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式を使える形になっている。

② 被積分関数のルートの中身の $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ が２乗の形になる。

意味を話す前に、①の $\displaystyle\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ を知らないという人もいるから、まずこれを話しておくことにするね。

これは、知らない人もいるけど、積分の有名な公式ですよ。なぜ、成立するかは合成関数の微分の公式を使えばあきらかですよ。

$\{f(x)\}^n$ を微分すると、$n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ という微分の公式があったよね。

今回もこの公式を使えば、$\dfrac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$ を微分すると $\{f(x)\}^n$ になっています。だから、上記の公式 $\displaystyle\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ が成立します。

この、$\displaystyle\int f'(x)\{f(x)\}^n\,dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ は受験では超がつくくらいの頻出です。被積分関数が積のときは、まずこの公式を使えないか？と考えるようにしてください。

使えない場合、そこで初めて「部分積分かな？」「置換積分かな？」などと考えます。特に、面積や体積を求めるときは、この公式を使える確率が圧倒的に高い気がしますよ。

それでは、解説付きの解答に進みます。「えっ？こんな式変形するの？なかなか思いつかないな」と感じるかもしれません。確かに最初は難しいと思います。でも、慣れてきたら「こうするくらいしかないな」と言う感じで気づけるようになってきます。頑張ってついてきてくださいね。

【問題の解答】

とりあえずルートの中身の $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ をまず計算しておくことにするね。

$$x = (1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= (1+\cos\theta)'\cos\theta + (1+\cos\theta)(\cos\theta)' \\ &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ &= -2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta \\ &= -\sin 2\theta - \sin\theta\end{aligned}$$

⇑ 最後の $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ と２倍角の公式を適用するところが思いつきにくいかもしれません。ですが、これはその場で思いついたのではなく、次の $\dfrac{dy}{d\theta}$ をする過程で思いつくものです。$\dfrac{dy}{d\theta}$ をすれば分かります。これと同じような形にしないといけない、という感覚でこの変形をしました。

$$y = (1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= (1+\cos\theta)'\sin\theta + (1+\cos\theta)(\sin\theta)' \\ &= -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta \\ &= \cos 2\theta + \cos\theta\end{aligned}$$

⇑ 上記ですが、とりあえず何も考えずに $-\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta$ のところまで変形できると思います。で、ここから２倍角の公式を使えば簡単になります。でも、思いつきにくい。

発想法としては、今回ここから２乗しないといけません。３項の２乗は面倒だけど、２項の２乗だと計算が簡単だよね。だから、思いつきました。まあ、最初のうちはなかなか気づけないかもしれません。でも、数学ってメンドウなことをさせることは意外に少ないです。だから、「できるけど、メンドウだな」と感じたときは、「何か他の方法はないかな？」と考えるクセを付けておいてください。そうすれば、気づけるようになりますよ。

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=(-\sin 2\theta-\sin\theta)^2+(\cos 2\theta+\cos\theta)^2$$

$$=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=(\sin^2 2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin 2\theta\sin\theta+2\cos 2\theta\cos\theta$$

$=1+1+2\cos(2\theta-\theta)$ ◀ 加法定理より $\cos(2\theta-\theta)=\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta$

$$=2(1+\cos\theta)$$

$$=2\left\{1+\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$=2\left(1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)$ ◀ cos の２倍角の公式より！

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$ ◀ ２乗の形になった！

＊上記で解法定理を使うところと、２倍角の公式を使うところが気づきにくいかもしれません。

加法定理で展開するのは慣れていると思うけど、こういうふう加法定理で整理するのは慣れていない人が多いです。でも、たまに出てきます。「こういうふうにすることもある」と頭に入れておけば気づけると思いますよ。

また、２倍角の公式を使うところ、こんなのなかなか気づけないよね。

こう式変形をした根拠は、「曲線の長さを求める問題では、ルートの中身を２乗にする！」です。これを知らなければ、上記のように変形するのは難しいと思います。「こうきたらこうすることが多い。だから、強引にこう式変形をする」なんてことが数学には多いですよ。ひとつずつ覚えていくしかないです。がんばってくださいね。

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \blacktriangleleft \sqrt{A^2} = |A| \text{ より！} \\
&= \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \quad \left(\because\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \text{ のとき、} \cos\frac{\theta}{2} \geqq 0\right) \\
&= \left[4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= \mathbf{4}
\end{aligned}
$$

【ちょっと自慢のコーナー】

今回のプリントで「被積分関数が積だったら、$\int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式を使えるかどうかまず考える」「曲線の長さを求めるときは、① $\int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$ の公式を使う、② ルートの中身が 2 乗になっていることが多い！」という話をしました。

こんなの、他の人で言ってっくれる人は極めて少ないよね。

なぜかと言うと、数学を教える立場にある人はもとから数学ができる人で、「こんなことは感覚的に分かってしまう」みたいです。かえって、こういうことを話すと、「解説が長くてかったるいよ …」なんて思います。

でも、頭の悪い僕には無理だった。だから、「なぜ、ここでこのように変形したのか？」ということを常に考えました。

そうしたら、まったく数学の才能のない僕でさえ、ある程度数学ができるようになりました。

だから、今もしあなたが数学ができなかったとしても、考えかたをひとつずつ覚えていけばできるようになりますよ。頑張ってくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司