「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

関数 $y = f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $(x > 0)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $h(x) = g(\sqrt{x^3 + 1})$ を微分せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^5 + x^2}}\,dx$ を求めよ。

【（１）の解答】

＊逆関数を求める問題です。逆関数に限った話ではありません。関数を求めるときに、「定義域」がある場合、答えに定義域を書いておきます。

逆関数は、元の関数と x と y を入れ替えたものです。だから、元の関数の定義域が逆関数の値域になり、元の関数の値域が逆関数の定義域になります。

$g(x)$ の定義域が必要です。だから、まず $f(x)$ の値域を求めてから解いていきます。

まず $f(x)$ の値域を求める。

$e^x = t$ とする。$x > 0$ のとき $t > 1$ となる。
⇑ $f(x)$ は e^x のみで表されています。$e^x = t$ と置換して解いていくことにします。$x > 0$ のとき $e^x > 1$ となります。

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
&= \frac{t + \dfrac{1}{t}}{t - \dfrac{1}{t}} \\
&= \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{2t(t^2 - 1) - (t^2 + 1)2t}{(t^2 - 1)^2} \quad \blacktriangleleft \text{商の微分の公式より！} \\
&= \frac{2t^3 - 2t - 2t^3 - 2t}{(t^2 - 1)^2} \\
&= \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2}
\end{aligned}
$$

$t > 1$ のとき $\dfrac{dy}{dt} < 0$ である。

＊ $t > 1$ における y の値の範囲を求めます。単調減少ということが分かったので、極限値 $\lim_{t \to 1+0} y, \lim_{t \to \infty} y$ を求めます。

$$
\lim_{t \to 1+0} y = \lim_{t \to 1+0} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = 1
$$

よって、$f(x)$ の値域は $f(x) > 1$ となる。

＊ここまでで $f(x)$ の値域を求めることができました。これが $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の定義域となります。関数を求めるときは、定義域があるときは、定義域を求めておくということを覚えておいてくださいね。

$g(x)$ を求めるために $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ を x について解いていきます。

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
(e^x - e^{-x})y &= e^x + e^{-x} \\
(e^{2x} - 1)y &= e^{2x} + 1 \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } e^x \text{ をかけた！} \\
ye^{2x} - y &= e^{2x} + 1 \\
(y - 1)e^{2x} &= y + 1
\end{aligned}
$$

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$$

$$2x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}$$

よって、$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad (x > 1)}$

【(２) の解説】

合成関数の微分です。例えば $\{\sin f(x)\}' = \cos f(x) \cdot f'(x)$ となるように、$\{F(f(x))\}' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$ となります。

上記では分かりにくい人もいるかもしれません。もう少し砕けて表現でいいます。$\sin x$ を微分したら $\cos x$ だよね。$\sin f(x)$ を微分したら、x の部分を $f(x)$ にして、あと $f'(x)$ をかけておけば OK です。だから、$\{\sin f(x)\}' = \cos f(x) \cdot f'(x)$ です。

例えば $\log x$ の微分は $\frac{1}{x}$ です。$\log f(x)$ の微分は $\frac{1}{x}$ の x のところを $f(x)$ にして、$f'(x)$ をかければよいので、$\log f(x)$ を微分すると、$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ ですよ。

今回もその、合成関数の微分を使って微分をしていきます。まず、$f(x)$ を微分して $f'(x)$ を求めます。そして、x のところを $\sqrt{x^3+1}$ に置き換えて、$\sqrt{x^3+1}$ を微分したものをかけたものが、今回の答えです。

【(２) の解答】

$$g(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\{\log(x+1) - \log(x-1)\}$$ ◀ こうした方が微分しやすいよ！

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

また、$(\sqrt{x^3+1})' = \dfrac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3+1) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

よって

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{1-(\sqrt{x^3+1})^2} \cdot (\sqrt{x^3+1})' \quad \blacktriangleleft \text{合成関数の微分の公式より！} \\
&= -\frac{1}{x^3} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{2x\sqrt{x^3+1}}}
\end{aligned}
$$

【（３）の解説】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^2}}\,dx$ なんて言われてもどうするか分かんないよね。

でも、これは大学受験の問題です。大学受験の問題の場合、（１）、（２）、（３）となっている場合前問の結果を遣うことが多かったんだよね。

だから、「前問の結果を使うのかな？」といった感じでもう一度問題を見てみます。

すると被積分関数の $\dfrac{1}{\sqrt{x^5+x^2}}$ って（２）で求めた結果を使える形になっているんじゃないかな？

（２）の答えは、$h'(x) = -\dfrac{3}{2x\sqrt{x^3+1}}$ です。$x>0$ のとき、$x = \sqrt{x^2}$ なので、

$h'(x) = -\dfrac{3}{2x\sqrt{x^3+1}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x^5+x^2}}$ です。

これより、$\dfrac{1}{\sqrt{x^5+x^2}} = -\dfrac{2}{3}h'(x)$ です。$h'(x)$ を積分すると $h(x)$ なので、
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^2}}\,dx = -\frac{2}{3}h(x) + C$ ですよ。

「言われたら気づけるけど、自分一人ではなかなか気づけないよ」なんて思うかもしれません。ですが、さっきも言いました。受験問題で（１）、（２）となっているとき、前問の結果を使って解いていくことが多いんだよね。

このことを強く意識していれば気づけるようになってきますよ。頑張ってくださいね。

【（３）の解答】

（１）より $g(x)$ の定義域は $x > 1$ である。$h(x) = g(\sqrt{x^3+1})$ のとき、$\sqrt{x^3+1} > 1$ であるので、$x > 0$ となる。
⇑$g(x)$ の定義域は $x > 1$ です。だから、$g(\sqrt{x^3+1})$ が定義されるには、$\sqrt{x^3+1} > 1$ でないといけません。これより $x > 0$ です。

上記のように $x > 0$ としてもいいですし、今回の場合積分区間が２から n です。この区間において x はつねに２以上なので $(n \to \infty$ であるとき、$n \geqq 2$ としてよい$)$、$x > 0$ と書いてもいいと思いますよ。

$x > 0$ のとき、$x = \sqrt{x^2}$ となる。

（２）より、

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -\frac{3}{2x\sqrt{x^3+1}} \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{x^5+x^2}} \quad (\because \quad x > 0)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{x^5+x^2}} = -\frac{2}{3}h(x) \cdots ①
$$

$$\int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^2}}$$
$$=\left[-\frac{2}{3}h(x)\right]_2^n \quad (\because \text{①})$$
$$=-\frac{2}{3}h(n)+\frac{2}{3}h(2)$$

ここで、$g(x)=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ より、$h(x)=g(\sqrt{x^3+1})=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2}{3}h(n)+\frac{2}{3}h(2)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{n^3+1}+1}{\sqrt{n^3+1}-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2^3+1}+1}{\sqrt{2^3+1}-1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{n^3+1}+1}{\sqrt{n^3+1}-1}+\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{2^3+1}+1}{\sqrt{2^3+1}-1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-\frac{1}{\sqrt{n^3}}}+\frac{1}{3}\log\frac{3+1}{3-1}\right\}$$ ⇐ 左側の分数の分母分子を $\sqrt{n^3}$ で割った！
$$=-\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt{1+0}-0}+\frac{1}{3}\log 2$$
$$=\frac{1}{2}\log 1+\frac{1}{3}\log 2$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log 2}$$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司