「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

複素数平面において、等式 $2|z-4| = 3|z-3i|$ をみたす点 z の全体はどのような図形を表すか。ただし i は虚数単位とする。

【解説】

複素数平面の問題です。まずは、以下のことを覚えておいてください。

２点間の距離

$\boldsymbol{|\alpha-\beta|}$ は、２点 α,β 間の距離である。

上記で言ったように、絶対値は距離だからね。このことを、理解していれば以下も簡単に理解できると思います。

円

z は複素数平面上の動点、α は定点。r は実数の定数である。

$$\boldsymbol{|z-\alpha| = r}$$

点 z は、点 α を中心とする半径 r の円周上を動く。

これは、さっきの２点間の距離を理解していればすぐに分かると思います。

$|z-\alpha|$ とは、２点 z,α の距離です。この値が r です。ということは、動点 z は定点 α からの距離が r を満たしながら動きます。

定点からの距離が等しい、は円だよね。複素数平面の軌跡の問題は、多くの場合円ですよ。あとは、直線もたまに出てきます。まあ、「どっちかな？」なんて思いながら解いていけばいいですよ。

次に、複素数の絶対値の話しに進みます。絶対値は、実数のときにも勉強をしました。実数のときは、以下のような性質があったと思います。

絶対値の性質（実数）

A, B が実数のとき、以下が成立する。

(i) $|AB| = |A||B|$

(ii) $\left|\dfrac{B}{A}\right| = \dfrac{|B|}{|A|}$

(iii) $|-A| = |A|$

(iv) $|A|^2 = A^2$

次に、絶対値の複素数の性質です。複素数のときも実数のときとほぼ同じなのですが、上記の (iv) だけは違います。

α を複素数。$\overline{\alpha}$ と表します。$\boldsymbol{|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}}$ です。これだけは、違うのでしっかりと覚えておいてくださいね。一応、複素数の絶対値の性質もまとめておきます。

絶対値の性質（複素数）

α, β は複素数。また、$\overline{\alpha}$ は α の共役な複素数。このとき、以下が成立する。

(i) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

(ii) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$

(iii) $|-\alpha| = |\alpha|$

(iv) $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$

＊証明は、$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ とおいてやっていけばできますよ。ちょっと、メンドウですが、方針としては簡単です。ひとつだけ示しておきます。ちなみに、$z = x + yi$ のとき、$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ですよ。

【$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ の証明】
a, b, c, d を実数として、$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ とする。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= |\alpha\beta| \\
&= |(a+bi)(c+di)| \\
&= |ac + adi + bci + bdi^2| \\
&= |(ac-bd) + (ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= |\alpha||\beta| \\
&= |a+bi||c+di| \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}
\end{aligned}
$$

以上より、$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ が成立する。（証明終）

少しメンドウだけど、やっていることとしては簡単です。上記の、複素数の絶対値の性質はすべてこのようにすれば導くことができますよ。それでは、問題に戻るね。以下のことを覚えておいてください。

複素数平面で絶対値が出てきたときの扱い方

複素数平面で、絶対値が出てきたときは、

$$|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$$

を使って解くことが多い。

複素数平面で、絶対値が出てきたらほとんどの場合、上記の式変形をしますよ。覚えておいてくださいね。今回の問題も、与えられて式に絶対値が含まれているよね。だから、上記の変形をして解いていきます。

ただ、上記の変形をするためには絶対値の２乗でないとダメなので、まず両辺を２乗してから解いていくことにします。

【解答】

$$2|z-4|=3|z-3i|$$

$$4|z-4|^2=9|z-3i|^2$$ ◀ 両辺を２乗した！

$$4(z-4)(\overline{z-4})=9(z-3i)(\overline{z-3i})$$ ◀ $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ より！

$$4(z-4)(\overline{z}-4)=9(z-3i)(\overline{z}+3i)$$

$$4(z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16)=9(z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}+9)$$

$$5z\overline{z}+(16+27i)z+(16-27i)\overline{z}+17=0$$

＊とりあえずここまで変形をすることができました。ここからは、少し強引な式変形をしていきます。多分やったことがないと解けないと思います。「こういうふうに変形をするのか」と思ってもらえば十分ですよ。

$$z\overline{z}+\frac{16+27i}{5}z+\frac{16-27i}{5}\overline{z}+\frac{17}{5}=0$$ ◀ 両辺を５で割った！

$$z\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\overline{z}+\frac{17}{5}=0$$

＊ $\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)$ を強引に作り出します。

$\overline{z}=\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-\frac{16+27i}{5}$ が言えるよね。これを、さっきの式の $\overline{z}$ のところに代入します。

「なんで、こんなことするの？」なんて思う人もいます。でも、こうやったらうまくいくとしか答えようがないんです。覚えてもらうしかないですよ。

$$z\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\overline{z}+\frac{17}{5}=0$$

$$z\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\left\{\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-\frac{16+27i}{5}\right\}+\frac{17}{5}=0$$

⇑ $\overline{z}=\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-\frac{16+27i}{5}$ より！

$$z\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\left(\overline{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-\frac{16-27i}{5}\cdot\frac{16+27i}{5}+\frac{17}{5}=0$$

＊ここから、$-\frac{16^2-(27i)^2}{25}+\frac{17}{5}$ の部分の計算がすこしややこしいので、この部分だけまず計算をしておきます。

$$
\begin{aligned}
& -\frac{16^2-(27i)^2}{25}+\frac{17}{5} \\
&= -\frac{16^2+27^2}{25}+\frac{17}{5} \\
&= -\frac{256+729}{25}+\frac{17}{5} \\
&= -\frac{985}{25}+\frac{85}{25} \\
&= -\frac{900}{25} \\
&= -36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z\left(\bar{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\left(\bar{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-\frac{16-27i}{5}\cdot\frac{16+27i}{5}+\frac{17}{5} &= 0 \\
z\left(\bar{z}+\frac{16+27i}{5}\right)+\frac{16-27i}{5}\left(\bar{z}+\frac{16+27i}{5}\right)-36 &= 0 \\
\left(z+\frac{16-27i}{5}\right)\left(\bar{z}+\frac{16+27i}{5}\right) &= 36 \quad \text{◀ 左辺を因数分解をした！} \\
\left(z+\frac{16-27i}{5}\right)\left(\overline{z+\frac{16-27i}{5}}\right) &= 36 \quad \text{◀ 下記の【注】を見よ。} \\
\left|z+\frac{16-27i}{5}\right|^2 &= 36 \\
\left|z+\frac{16-27i}{5}\right| &= 6 \\
\left|z-\frac{-16+27i}{5}\right| &= 6 \quad \text{◀ } |z-\alpha|=r \text{ の形にした！}
\end{aligned}
$$

以上より、点 $\boldsymbol{\dfrac{-16+27i}{5}}$ を中心とする半径 **6** の円

【注】について

上記の【注】の部分の式変形は少し気付きにくかったと思います。ですが、これは問題を解く前から、答えは「円」である、ということは想像できます（以下のアポロニウスの円を見てください）。

円になるとき、$|z-\alpha|=r$ つまり $(z-\alpha)(\overline{z-\alpha})=r^2$ になるということは予想できています。

だから、上記の【注】のように変形できることに気づけました。今回の式変形はかなり

ややこしかったかもしれません。大変ではありますが、ワンパターンで、「こう式変形をするしかない」というものです。

よく出てくるので、流れを覚えてしまって解けるようになっておいてくださいね。

アポロニウスの円

> 2定点 A, B からの距離の比を $m : n\ \ (m \neq n)$ にみたしながら動く動点の軌跡は、線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円となる。

今回、$2|z-4| = 3|z-3i|$ を変形すると、$|z-4| : |z-3i| = 3 : 2$ つまり、z は点 4 と点 $3i$ との距離の比が $3 : 2$ です。

アポロニウスの円の知識からこれは円になると予想できるよね。当初から円になるということは予想できています。

だから、上記のような強引な変形が思いつけました。

PS
今回の問題は、アポロニウスの円を使って解くこともできます。ただ、厳密に言えば、アポロニウスの円は教科書に載っていない解法です。

教科書に載っていない解法は使わない方がベターです。だから、使わない方がいいと思いますよ。

といっても大学受験って結構テキトウなんです。一部の大学は教科書の範囲をしっかりと理解していないところもあります。

だから、「アポロニウスの円」を使って解かせることを前提とした問題を出題してくる大学がないとは限りません。「普通の解法で解くのはあまりに計算が大変」そういうときは、最終手段としてアポロニウスの円を使って解く解法でもいいと思いますよ。

【別解について】

この問題は、$z = x + yi$ として求めることもできます。

数学 II の軌跡を求める問題で、動点 P の座標を (x, y) とおいて解いていったよね。それと同じようなものです。

ただ、これはあくまで僕の感覚的な話しです。複素数平面の問題で $z = x + yi$ とおいて解いていく解法は、計算が大変になることが多いです。

また、少し言い方はおかしいですが、「ちょっとだけ、ブサイクな解法」です。もちろん、解けたらそれで OK なのですが、$z = x + yi$ で解くのは、あまりおすすめしません。

ただ、$z = x + yi$ でしか解けない問題もあります。だから、まず最初に普通の解法で考えてみて、それで無理なら「$z = x + yi$ を使うのかな？」なんて考えられるようになっておいてくださいね。

今回の場合、$z = x + yi$ でも解くことができるので、別解として紹介しておきます。

【別解】

x, y を実数として、$z = x + yi$ とおく。

$$2|z-4| = 3|z-3i|$$
$$4|z-4|^2 = 9|z-3i|^2$$
$$4|(x+yi)-4|^2 = 9|(x+yi)-3i|^2$$
$$4|(x-4)+yi|^2 = 9|x+(y-3)i|^2$$
$$4\{(x-4)^2+y^2\} = 9\{x^2+(y-3)^2\}$$ ◀ $|a+bi|^2 = a^2+b^2$ より！
$$4x^2-32x+64+4y^2 = 9x^2+9y^2-54y+81$$
$$5x^2+32x+5y^2-54y = -17$$
$$x^2+\frac{32}{5}+y^2-\frac{54}{5} = -\frac{17}{5}$$
$$\left(x+\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{27}{5}\right)^2 = \frac{16^2}{5^2}+\frac{27^2}{5}-\frac{17}{5}$$
$$= 6$$

以上より、点 $\boldsymbol{\dfrac{-16+27i}{5}}$ **を中心とする半径 6 の円**

今回の場合、$z = x + yi$ でおいた方が計算はラクだったかな？ただ、ひとつめの解法は、とても重要ですよ。受験でも頻出です。しっかりと解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司