「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学 III の「極限」　　難易度：「基礎」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

x を実数として、無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx(x-2)}$$

を考える。

(1) この無限等比級数が収束するような x の条件を求めなさい。

(2) この無限等比級数が収束し、その和が $\dfrac{1}{e-1}$ に等しくなるような x の値を求めなさい。

【（１）の解説】

問題に進む前に、まずは無限等比級数について話しておくね。

項数無限にあるような数列を無限数列と言います。そして、その和のことを無限級数といったり、無限級数の和といいます。

無限級数は、$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k}$ が成立すると定義します。右辺の $\sum_{k=1}^{n} a_k$ のことを部分和といいます。

上記の等式が成立するのは、感覚的には理解できると思います。高校数学では、そこまでつっこんできかれることはないので、「そんなものだ」といった理解で十分だと思いますよ。

だから、こういった無限級数の和を求める問題では、部分和を求められるときは部分を求めて、そして $n \to \infty$ をすれば求めることができます。

無限等比級数とは、単に無限数列が等比数列のときという意味だけです。それでは、無限等比級数について以下のことを覚えておいてください。

無限等比級数の収束条件

初項 a、公比 r の無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束条件は $\boldsymbol{a = 0}$ または $\boldsymbol{-1 < r < 1}$ である。

初項の $a = 0$ のときの、無限数列は各項がすべて 0 です。 0 はいくら足しても 0 なので初項が 0 のとき、無限等比級数は当然、 0 に収束します。

次に、$a \neq 0$ のときです。

これは、等比数列の和の公式を思い出してもらえばすぐに分かると思いますよ。

等比数列の和の公式は $S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ an & (r = 1) \end{cases}$ だったよね。

あと、必要なのは r^n の収束条件です。一応、まとめておきます。

r^n の極限について

$\lim_{n\to\infty} r^n$ について

(i) $\boldsymbol{r > 1}$ のとき、$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = \infty}$
(ii) $\boldsymbol{r = 1}$ のとき、$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 1}$
(iii) $\boldsymbol{-1 < r < 1}$ のとき、$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} r^n = 0}$
(iv) $\boldsymbol{r = -1}$ のとき、±1 を繰り返し、極限はない
(v) $\boldsymbol{r < -1}$ のとき、極限はない

上記より、$\lim_{n\to\infty} r^n$ が収束するとき、$\boldsymbol{-1 < r \leqq 1}$ である。

これで、考えていきます。まず、$r \fallingdotseq 1$ のとき $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ の極限が収束するには、r^n が収束したらいいんだよね（← $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ で、n を含んでいる部分は r^n のみです。だから、この r^n が収束したら S_n 自体も収束します）。

r^n の収束条件は $-1 < r \leqq 1$ だったけど、今回の場合 $r \fallingdotseq 1$ で考えています。だから、$-1 < r \leqq 1$ から $r = 1$ を除外した $-1 < r < 1$ です。

これが $r \fallingdotseq 1$ のときの、S_n の収束条件です。ちなみに、$-1 < r < 1$ のとき $r^n = 0$ より、$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a(1-0)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$ となります。

次に $r = 1$ のときです。このとき、$S_n = an$ です。$a \fallingdotseq 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} an$ は正の無限大か負の無限大に発散するよね。だから、当然 $r = 1$ のときは収束しません。

無限等比級数が $-1 < r < 1$ のとき、S を無限等比級数の和として、$\boldsymbol{S = \dfrac{a}{1-r}}$ となることを公式として暗記している人がいます。

当然、暗記してもらってもいいですよ。ただ、この公式は等比数列の和の公式から意味を考えると、一瞬で導けるものです。

公式として覚えるにしても、しっかりと意味を理解した上で暗記するようにしてくださいね。

それでは、前置きはこのくらいにして今回の問題を解いていきます。

今回の問題は、$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx(x-2)}$ です。

このくらいなら慣れたらすぐに分かると思います。でも、最初だから書いておくことにするね。

例えば、$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r^1 + r^2 + r^3 + \cdots$ とかくことができます。少し考えたら分かるけど、この場合初項 r、公比 r です。

で、今回は指数法則を使って変形すると、$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx(x-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{x(x-2)})^n$ と変形できます。

先ほどの $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ でいうところの、$r = e^{x(x-2)}$ となったものです。だから、今回は初項 $e^{x(x-2)}$、公比 $e^{x(x-2)}$ です。

で、無限等比級数の収束条件は $a = 0$ または $-1 < r < 1$ でした。今回の場合、初項は $e^{x(x-2)}$ は0になることはないよね。$e > 0$ より e° は0よりも大きくなり0になることはありませんん。

だから、今回は $-1 < r < 1$ の方のみを考えればOKです。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx(x-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{x(x-2)})^n$

無限等比級数の初項は $e^{x(x-2)}$、公比は $e^{x(x-2)}$ となる。

$e^{x(x-2)} > 0$ より、この無限等比級数が収束するとき $-1 < e^{x(x-2)} < 1$ である。

$e^{x(x-2)} > 0$ より $-1 < e^{x(x-2)}$ は常に成立する。

$$e^{x(x-2)} < 1$$
$$e^{x(x-2)} < e^0$$
$$x(x-2) < 0$$
$$0 < x < 2$$

よって、$\boldsymbol{0 < x < 2}$ である。

【注】
上記は簡単かもしれません。ですが、念のため説明しておきますね。

まず、$-1 < e^{x(x-2)} < 1$ は「$-1 < e^{x(x-2)}$ かつ $e^{x(x-2)} < 1$」ということです。今回の場合、左側の不等式 $-1 < e^{x(x-2)}$ は常に成立します。だから、右側の不等式 $e^{x(x-2)} < 1$ だけを考えれば OK です。

また、$\begin{array}{l} e^{x(x-2)} < 1 \\ e^{x(x-2)} < e^0 \end{array}$ と変形したところです。これは、「$a > 1$ のとき、$a^x > a^y \iff x > y$」を使っただけですよ。

e はだいたい $e \fallingdotseq 2.71$ という数なので 1 よりも大きいです。だから、$e^{x(x-2)} < e^0$ は $x(x-2) < 0$ となります。

上記は、当たり前と思えるようになって欲しいです。ただ、このあたりがあいまいな人も多いです。テキトウに解くのではなくて、ちゃんと理解して進めるようにしてくださいね。

数学 III は計算量も多く、これまで勉強してきたいろいろな単元の知識が必要になってきます。あいまいなまま解いていると、絶対につまづいてしまいます。がんばってくださいね。

【（２）の解答】

＊ $a \fallingdotseq 0$ のとき、無限等比級数の和 S が $S = \dfrac{a}{1-r}$ となることを使うだけですよ。少し、見た目が煩雑になるけど、数学 III は計算が煩雑なものが多いですよ。慣れておいてくださいね。

無限等比級数が収束するとき、その和は $\dfrac{e^{x(x-2)}}{1-e^{x(x-2)}}$ となる。

⇑ 無限等比級数の公式 $S = \dfrac{a}{1-r}$ で、$a = e^{x(x-2)}, r = e^{x(x-2)}$ を代入した！

無限等比級数の和が $\dfrac{1}{e-1}$ となるので、

$$\frac{e^{x(x-2)}}{1-e^{x(x-2)}} = \frac{1}{e-1}$$

$$(e-1)e^{x(x-2)} = 1 - e^{x(x-2)} \blacktriangleleft \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \text{ のとき、} BC = AD \text{ より！}$$

$$e^{x(x-2)+1} - e^{x(x-2)} = 1 - e^{x\,x-2}e^{x(x-2)+1} \qquad = 1$$

$$x(x-2)+1 = 0 \blacktriangleleft e^x = 1 \text{ のとき、} x = 0 \text{ より！}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

これは、（１）の条件をみたす。よって、$x = \mathbf{1}$

これで、今回の問題は終わりです。無限等比級数の基本的な問題です。

解けていなかった人は、復習を頑張ってしっかりと理解しておいてい下さい。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司