

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅲの「積分」 難易度：「標準」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

n を自然数とする。関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ とする。

(1) $f(x)$ はつねに減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{t(t+1)} dt$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^n f(x) dx$ を求めよ。また、不等式 $\int_0^n f(x) dx < \log 2$ を証明せよ。

【(1)の解答】

*「常に減少することを示せ」だから、とりあえず $f(x)$ を微分します。 $f(x)$ の微分なんだけど、分数の形をしているから商の微分で解こうとする人がいます。

でも、商の微分はメンドウです。こういったとき、 $\int \frac{1}{f(x)} dx = \int \{f(x)\}^{-1} dx$ として解いていきます。

当然、 $\{f(x)\}^n$ の微分は $\{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x)$ の公式で微分します。

$$f(x) = \frac{1}{e^{x+1}}$$

$$= (e^x + 1)^{-1}$$

$$f'(x) = -(e^x + 1)^{-2} \cdot (e^x + 1)' \quad \blacktriangleleft \quad (\{f(x)\}^n)' = n \{f(x)\}^{n-1} \cdot f'(x) \text{ の公式を使った!}$$

$$= -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

↑ $e^x > 0$ より、当然 $f'(x)$ は常に負ですよ。

よって、 $f(x)$ はつねに減少する。(証明終)

【(2) の解答】

* こういうふうには、積分関数の分母が因数分解されているときは部分分数分解をして解いていくんだったんだよね。しっかりと覚えておいてください。

$$\int \frac{1}{t(t+1)} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \quad \blacktriangleleft \quad \text{部分分数分解をした!}$$

$$= \log |t| - \log |t+1| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

【(3) の解答】

* いきなり、問題を解いていきます。「なぜ、そう式変形をしたの?」と思う人もいます。とりあえず、(3) を解いたあとに、説明します。

$$\int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{e^x + 1} dx$$

ここで、 $e^x = t$ とする。

$$e^x = t \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると } e^x = \frac{dt}{dx} \text{ つまり } dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

$$\begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow n \\ \hline t & 1 \rightarrow e^n \end{array}$$

よって、

$$\begin{aligned}
& \int_0^n f(x) dx \\
&= \int_1^{e^n} \frac{1}{t(t+1)} dt \\
&= \left[\log |t| - \log |t+1| \right]_1^{e^n} \quad (\because (2)) \\
&= \log |e^n| - \log |e^n + 1| - (\log |1| - \log |2|) \\
&= \log e^n - \log(e^n + 1) + \log 2 \cdots \textcircled{1} \\
&= n \log e - \log(e^n + 1) + \log 2 \\
&= n - \log(e^n + 1) + \log 2
\end{aligned}$$

また、 $e^n < e^n + 1$ より $\log e^n < \log(e^n + 1)$ が言えるので $\log e^n - \log e^{n+1} < 0$ である。

よって、 $\textcircled{1}$ の式より、 $\int_0^n f(x) dx < \log 2$ である。(証明終)

【(3) の解説】

今回の問題は、 $e^x = t$ と置換するところがポイントでした。

なぜ、こうするのかと言えば (2) の設問があるからです。大学受験を解くとき、以下が重要になるので覚えておいてください。

大学受験の考え方

大学受験の問題で (1)、(2)、… となっているとき、前問 (まで) の結果を使ったりヒントにして問題を解くことが多い！

今回の (3) だったら、もし誘導がなくても $e^x = t$ と置換するということくらいは気づけて欲しいです。

ただ、問題によっては (2) を使って解くということを念頭に入れておかないと、絶対に解けない問題もあります。だから、(1)、(2) となっていて、「どうやって解いたらいいんだろう？」と解法に行き詰ったら、上記の事柄を思い出すようにしてください。

ホントに重要ですよ。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司