

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅲの「極限」 難易度：「基礎」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

$\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ の極限を求めよ。ただし、 $[x]$ は、実数 x を超えない最大の整数を表す。

【解説】

例えば、 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x)$ だったら、 $x^2 + 3x$ のところに $x = 2$ を代入して、

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$ としたら極限值を求めることができます。

で、今回の問題も同じように代入して、

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} [x] \\ &= [2] \quad \leftarrow x = 2 \text{ を } [x] \text{ に代入した！} \\ &= 2 \end{aligned}$$

上記のように解いたらダメだよ。極限は、代入してよいときと代入したらダメなときがあります。 それについて、今から話していくことにするね。

その前に、ガウス記号です。ガウス記号は、出題されるときは「実数 x を超えない最大の整数」と説明されていることがほとんどです。

これなんだけど、もっと分かりやすい言葉で言えば「 $[x]$ は x の整数部分」ということです。こっちの方が分かりやすいことが多いですよ。

さっき、 $[2] = 2$ としたけど、これは明らかだよな。2 の整数分は 2 です。だから、 $[2] = 2$ です、

それでは、今回の本題に戻ります。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ と代入してよいのは、「 $x = a$ において関数 $f(x)$ が連続なとき」です。

連続とは、感覚的に言えば「グラフがつながっている」と考えてもらってよいですよ。

高校数学において、ほとんどの関数は連続です。だから、特に注意しなくても極限のときは代入してもらっても大丈夫です（← ホントは関数が連続かどうか確認しないとダメですよ。ただ、ほとんどの場合、連続なので代入しても OK ということが多いです）。

で、高校数学において連続でないのは $\tan x$ が $x = \pm \frac{\pi}{2}$ など連続でない、この $[x]$ は階段のようなグラフになるので $x = n$ (n は整数) で連続ではない、後は $\frac{g(x)}{f(x)}$ で $f(x) = 0$ となるところでは連続でない

連続でない関数は他にもありますが、有名どころとしては上記の 3 つくらいです。こういった関数のときは、注意するようにしてくださいね。

それでは、今回の問題を解いていきます。こういうふうに、連続でない関数のときは、右側極限と左側極限を求めることが多いです。

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が同じ値に収束するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ も収束します。

右側極限、左側極限のどちらか一方でも収束しなければ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ も収束しません。また、右側極限、左側極限の両方が収束したとしても、両方とも同じ値に収束していなければ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は収束しません。

今回の問題の場合、 $\lim_{x \rightarrow 2+0} [2]$ は、 $x \rightarrow 2+0$ とは x を 2 よりも大きい方から 2 に近づけるということなんだよね。感覚的に言えば、2.00000000000001 みたいな感じです。

この場合、整数部分は 2 なんだよね。だから、 $\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$ です。

次に、 $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ を考えます。 $x \rightarrow 2-0$ は 2 より小さいほうから 2 に近づけるということです。感覚的には、1.99999999... のようなものです。このとき、どんなに 2 に近づいても整数部分は 1 だよね。

だから、 $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$ です。

これで、右側極限と左側極限が求まりました。今回の場合、両方とも収束してくれるけど、極限值は同じ値ではないよね。だから、今回の極限はありません。

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] \neq \lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ より、 $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ の極限はない。

今回の問題はどうかだったでしょうか。本当に基本的な問題なんだけど、このあたりが理

解出来ていない人が多いです。

僕も高校生の頃、何も考えずに解いていました。それでも、関数はほとんど連続だから解けてしまうんですね。でも、こういったガウス記号なんかで「あれっ？」と点数を落としてしまう ……

丁寧に理解していかないと、ある程度のところで成績が伸びなくなりますよ。ひとつずつ丁寧に理解して進めていくようにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！

あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司