

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

---

単元：数学Ⅲの「積分」      難易度：「標準」

\*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

$x > 0$  に対して、 $\frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  を示せ。

### 【解説】

2007年のお茶の水女子大学の過去問です。パッと見た感じでは「関数の不等式の証明だから微分を使うのかな？」と思うかもしれませんが。

実はこれ「積分の面積を使って解く問題」です。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、少しポイントとして上げると今回の問題は  $f(x) < g(x) < h(x)$  を示せという問題です。

この不等式を微分を使った方法で示すとなると  $g(x) - f(x) > 0$  と  $h(x) - f(x) > 0$  の2種類を証明しないといけません。これって面倒だよね？絶対とは言わないけど、こういうふうに  $f(x) < g(x) < h(x)$  の形をしている時は微分を使った方法以外によい方法があるということが多いです。覚えておいてください。

少し余談になりますが、「面倒だから他の解き方を考えるってなんだか論理的じゃないですね」というようなことを言われたことがあります。

確かに論理的じゃないですよ。ただ、数学って単に面倒なだけの問題が出ることって本当に少ないんです。

出題者もそんなこと望んでいないのかな?と思います。だから、問題を解いていて、「この解き方で解けるけど、あまりに面倒すぎるな」と思えるときは、何か別にもっと良い解き方ある可能性が高いです。意外に重要な事なので覚えておいてください。

それでは、問題の解説に進みたいと思います。

まず、中央の  $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  を次のように式変形をします。

$$\begin{aligned} & \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \log \frac{x+1}{x} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\ &= \log(x+1) - \log x \quad \leftarrow \text{log の公式 } \log \frac{A}{B} = \log A - \log B \text{ より} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

上記のように式変形できました。最後の式変形の  $\log(x+1) - \log x = \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$  が分からないという人もいます。そういった人は右辺の  $\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$  を積分の計算を普通にしてみてください。そうすると、左辺の  $\log(x+1) - \log x$  になっているとうことが分かると思いますよ。

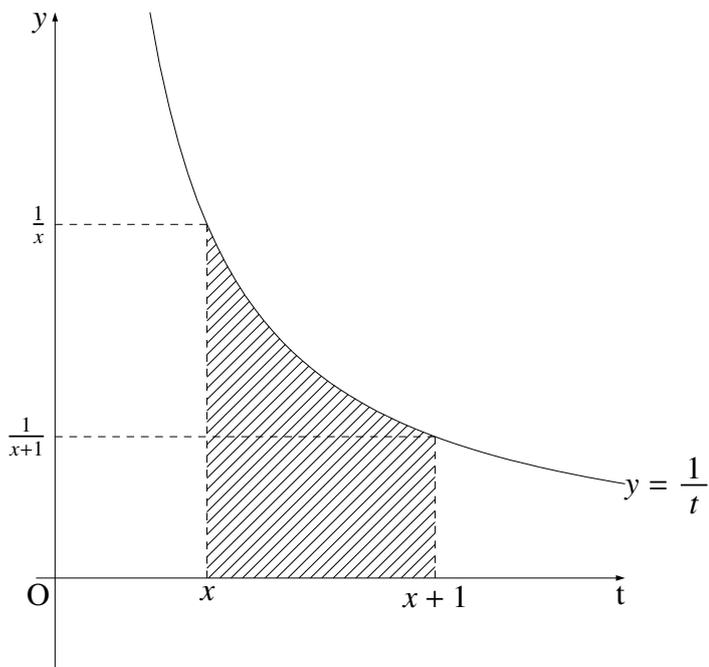
この式変形を見て多くの人は「こんな式変形、言われたら気づくけど、こんなの言われないと気付かないよ」と思うと思います。僕も、はじめて勉強したときはあなたと同じように「こんなん気付かへんわ！(関西弁です)」と感じたのを覚えています。

で、これなんですけど気付く、気付かないじゃなくて「覚えてね」ということです。実は今回の問題は本当に頻出です。最初に話したけど  $f(x) < g(x) < h(x)$  の形をしている時は、微分以外の解き方があると言いました。微分以外の解き方って言ったけど、ほとん

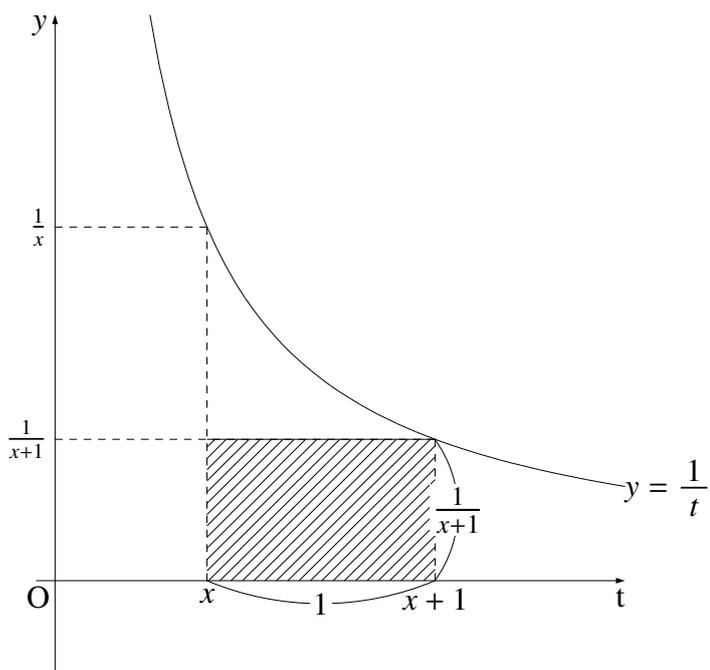
どの場合積分を使って解いていく解法です。

$f(x) < g(x) < h(x)$  の場合、真ん中の  $g(x)$  が積分を使える形になります。そして、今回は真ん中の  $g(x)$  が  $\log$  を含んだ式ですが、 $\int \frac{1}{t} dt$  を使って表せることが多いです。これは、始めて見て思いつけるという人は少ないです。よく出てくる式変形なので覚えてしまってください。

このことより示したい式は  $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}$  です。まず、真ん中の式  $\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$  はどういったものを表しているか分かる？これって以下の斜線部の面積だよな。



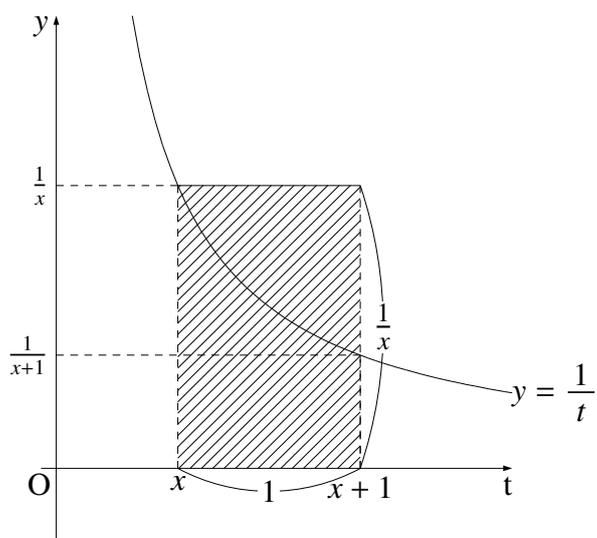
一方で、少し気付きにくいかもしれないけど左辺の  $\frac{1}{x+1}$  は  $1 \times \frac{1}{x+1}$  と変形できます。これは、下の長方形の面積を表します。



これで  $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$  っていうのは面積を考えたら成立するということがわかります。

右側の不等式も同じように考えたらいいということが分かると思います。次に右側の

$\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}$  の方を見ていきます。



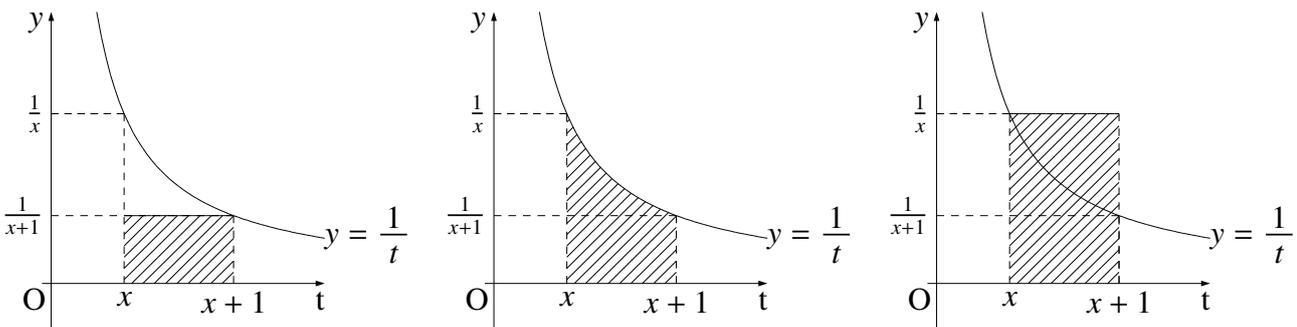
それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$x > 0$  のとき、 $\frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  を示す。

$$\begin{aligned} & \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \log \frac{x+1}{x} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\ &= \log(x+1) - \log x \quad \leftarrow \text{log の公式 } \log \frac{A}{B} = \log A - \log B \text{ より} \\ &= \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt \\ & \text{より、} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x} \end{aligned}$$



上図の斜線部の面積は左より順に  $\frac{1}{x+1}$ ,  $\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$ ,  $\frac{1}{x}$  を表している。

図より、 $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}$  がいえる。

つまり、 $\frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  が成立する。(証明終)

今回の問題はどうかだったでしょうか？面積を使って不等式を示すなんて知らない人も多かったと思います。でも、実際の大学受験では最頻出とまではいかないですが比較的よく出てきます。

今回のこの問題もまったく同じ問題が確か広島大学でも出題されていたと思いますし、似たような問題は過去何回も出題されている有名問題です。答えを見てもらえば分かると思いますが、知っていたらごくごく簡単に解ける問題です。しっかりと理解しておいてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

**ルールを覚えれば誰でもできる!**

あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司