

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅲの「微分」 難易度：「発展」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

$0 < y < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $x - y$ と $\sin x - \sin y$ を大小比較せよ。

【解説】

通常、 A と B の大小比較をせよ、ときた場合、とりあえず $A - B$ をします。

その計算結果として、 $A - B > 0$ のときは $A > B$ になります。また、 $A - B < 0$ のときは $A < B$ となります。

で、今回もそれに従ってやっ払いこうかな？ということで、とりあえずやっ払いいきます。

この考えに従って、 $(x - y) - (\sin x - \sin y)$ をしてみようかな？と考えます。でも、こういう大小比較のときは答えの目ぼしを付けることができることもあります。

今回の場合、 $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ なんだから、例えば $x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}$ を代入して、答えを予想してから解いていくこともあります。

ただ、グダグダといろいろなことを言ってきたけど、今回はこの解法ではとけません。 $(x-y) - (\sin x - \sin y)$ は、 x と y の 2 変数です。2 変数のときは、通常の方法では解けないことが多いです。

そこで、単純に引く以外の解法で解いていかないとはいけません。

今回の問題は、かなりの難問ですよ。結論から言えば、平均値の定理を使って解いていきます。平均値の定理は忘れていても多いと思うので、書いておくことにするね。

平均値の定理について

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり、开区間 (a, b) で微分可能なとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ かつ } a < c < b \text{ をみたす } c \text{ が少なくともひとつ存在する。}$$

よく「平均値の定理はどのようなときに使うの？」と聞かれることがあります。

平均値の定理は、不等式の証明のときにつかうことが多いです。特に、 $\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$ のような形をしているときは平均値の定理を使うことが多いです。

極限がらみの問題で出てきて、平均値の定理で不等式を作ったあとにはさみうちの原理で極限値を求めるとというのが、受験問題でよく出てくるものです。

今回の問題は、不等式を示せという問題ではありません。だから、平均値の定理を使うということが気づきにくいかもしれません。

ただ、2 変数です。だから、何かうまい解法があるはずですよ。また、 $x-y$ がきた時点で「あっ、これは平均値の定理を使うんだな」と気づけて欲しいです。

それでは、解答に進みます。

【解説】

$f(t) = \sin t$ とする。 $f(t)$ は常に連続で、微分可能である。

* 平均値の定理を使うためには、閉区間で連続、开区間で微分可能でないといけません。ただ、今回の関数もそうだけど、高校数学で出てくる関数は、ほとんどの場合常に連続で微分可能だよ。

平均値の定理を使うときは、いきなり上記のように書いて解いてもらえばいいですよ。

区間 $[y, x]$ で平均値の定理より

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = f'(c) \cdots \textcircled{1} \text{ かつ } 0 < x < c < y < \frac{\pi}{2} \text{ をみたす } c \text{ が存在する。}$$

$f(t) = \sin t$ より $f'(t) = \cos t$ となる。 $0 < c < \frac{\pi}{2}$ より $f'(c) < 1$ となる。

* まず、今回は $0 < x < c < y < \frac{\pi}{2}$ より $0 < c < \frac{\pi}{2}$ も成立します。このとき、 $\cos c$ は、 $0 < \cos c < 1$ をみたすよね。だから、 $0 < f'(c) < 1$ です。ただ、今回必要なのは $0 < f'(c) < 1$ で $f'(c) < 1$ だけなので、こっちを使いました。

$f'(c) < 1$ に $\textcircled{1}$ を代入すると、 $\frac{\sin x - \sin y}{x - y} < 1$ となる。

また、 $y < x$ より $x - y > 0$ である。 $\frac{\sin x - \sin y}{x - y} < 1$ の両辺に $x - y$ をかけても不等号の向きは変わらない。

よって、 $\sin x - \sin y < x - y$ となる。

* 今回の問題、突然平均値の定理が出てきたのでびっくりしたよね。でも、平均値の定理って受験では頻出ですよ。「どういったときに平均値の定理を使うのか？」ということ覚えておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司