

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

次の等式を満たす実数 x をすべて求めよ。

$$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt = x^2$$

【解説】

お茶の水女子大学の過去問です。単なる定積分を解くだけの問題ですが、ややこしいです。丁寧に解いていかないと間違ってしまう。

受験会場ではどうしても緊張してしまいます。ただ、緊張して間違っているのは仕方がないです。何度も何度も解いて緊張していても大丈夫！そのくらいのレベルになるまで繰り返し練習をしておいてください。

それでは、問題に進みます。

$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt = x^2$ まず、よく分かんないけど、とりあえずインテグラルがあってはダメなので、左辺のインテグラルをなくす方向で考えます。

*両辺を微分したらいいのでは？と思う人がいます。でも、気を付けてね。この状態では微分することができないですよ。

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ の公式を使えるのは、被積分関数（積分される関数。インテグラルの中身の関数のこと）が t のみの式になっているときです。被積分関数に x が含まれているときは、積分できません。

今回の場合、被積分関数は $t^2 \sin(x-t)$ で、 x を含んだ式だよね。だから、微分はできないよ。加法定理で展開して x をインテグラルの外に出してとやってもらえば微分できます。やってもらえば分かるけど、積の微分が出てくるしややこしいので、おそらく違う解法で解いていきます。

両辺を微分する方法はできそうにない。なら、どうしようかな？と考えるんだけど、今回はよく見ると定積分できる形になっています。分かりにくいけど、単に部分積分で解くことが出来ます。

間違いやすいという人は、 $x-t=u$ とでも置換して解いてもいいと思いますが、置換すると面倒になるので今回はこのまま解いていきます。それでは、部分積分に進みたいと思います。

*今回は、 dx ではなく dt です。 x で積分ではなくて、 t で積分です。間違いやすいので気を付けてください。

$$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt$$
$$= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt$$

上記の式変形が少し分かりにくいというか、「ひょっとして間違っているのでは？」と思う人もいるかもしれません。確かに、間違いやすいんですけど次のことを考えたら分かると思いますよ。

微分の公式

$$\frac{d}{dt} \cos f(t) = -\sin f(t) \cdot f'(t)$$

上記より、 $\cos(x-t)$ を t について微分をしてみます。すると $\sin(x-t) \cdot (x-t)' = -\sin(x-t) \cdot (-1) = \sin(x-t)$ となります。

*今回の場合 $(x-t)'$ は t で微分をするので当然 $(x-t)' = -1$ です。少し間違いやすいの

で注意してくださいね。

上記で以下の式変形が成り立っているということを理解できると思います。

$$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt$$
$$= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt$$

で、ここからは部分積分をしていきます。

$$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt$$
$$= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt$$
$$= \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x - \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt$$

ここから、 $\left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x$ と $\int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt$ を別々に考えていこうとおもいます。ま

ず、 $\left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x$ ですが、

$$\left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x$$
$$= x^2 \cos(x-x) - 0^2 \cos(0-t)$$

↑ t のところに x を代入したものから、 t のところに 0 を代入したものを引いた！

$$= x^2$$

次に、 $\int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt$ を求めます。これは、また部分積分です。先ほどと同じように考えていきます。

$$\begin{aligned}
& \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt \\
&= \int_0^x 2t \cdot (-\sin(x-t))' dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x - \int_0^x (2t)'(-\sin(x-t)) dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x + 2 \int_0^x \sin(x-t) dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x + 2 \left[\cos(x-t) \right]_0^x \\
&= -2x \sin(x-x) - 2 \cdot 0 \sin(x-0) + 2(\cos(x-x) - \cos(x-0)) \\
&= 2(1 - \cos x)
\end{aligned}$$

以上より、左辺は以下ようになります。

$$\begin{aligned}
& \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt \\
&= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt \\
&= \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x - \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt \\
&= x^2 - 2(1 - \cos x)
\end{aligned}$$

ここまで少し大変でしたが、やっていることは丁寧に部分積分をただけです。間違いやすいのでとにかく丁寧に、丁寧に考えるようにしておいてください。ここからは、簡単です。

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt &= x^2 \\
x^2 - 2(1 - \cos x) &= x^2 \\
-2(1 - \cos x) &= 0 \\
1 - \cos x &= 0 \\
\cos x &= 1
\end{aligned}$$

$\cos x = 1$ を満たす実数は、 $x = 2n\pi$ (ただし n は任意の整数) です。

*最後に $x = 2n\pi$ と出てきました。「こんな答えでいいの？」と不安になる人もいます。でも、 $\cos x = 1$ で、 x の範囲が与えられていない (つまり、 x は実数全体の) とき、こう答えるしかありません。こういった答案の書き方もあるということを覚えておいてください。

今回の問題のポイントとしては、「とにかく計算ミスをしないこと」です。普段、高校生に接していてこの定積分の計算が苦手と言う人が多いです。

苦手といわないまでも、解くのに時間がかかる人がいます。定積分の計算は、いろいろありますが、そのすべてを暗記してください。そして、自由自在に使いこなせるようになっておかないと実際の大学受験では少し厳しくなります。

今回の問題も、かなり間違いやすい問題だったと思います。そんな問題でも自信をもって解けるようになるまで、教科書等で定積分の勉強をしておいてください。

それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司