問題１（A） 教科書

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n^3)$

問題２（A） 教科書

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+5}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{2n+1}$

問題３（A） 教科書

次の数列の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$　(京都産業大学)　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$　(明治大学)

(3) $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}-2\right)$　(名古屋市大)

問題４ (C)

数列の極限 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}-2n\sqrt[3]{n^3-n^2}+n^2\}$ の値は $\boxed{}$ である。

（産業医科大学)

問題５（B） 教科書

第 n 項が $\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn$ である数列 $\{a_n\}$ が収束するように定数 k の値を定めよ。また、極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

問題６（Ｂ）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{an+b-\sqrt{3n^2+2n}}=5$$ のとき、$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。 (名城大学)

問題７（Ａ） 教科書

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$ (東京電機大学)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$

問題８（Ａ） 教科書

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^3+9n^2+7n$ で表されるとする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ。

(3) （２）で求めた T_n を一般項とする数列 $\{T_n\}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。

(室蘭工業大学)

問題９（Ｂ）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の極限値を求めよ。

問題１０（Ｂ）

数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}(2n+3)a_n = 2$ をみたすとき、次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$　　(2) $\lim_{n\to\infty} na_n$

問題１１（Ｂ）

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2a_n}{a_n+3} = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問題１２（Ａ）　教科書

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n+5^n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)$　　(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n+(-3)^{n+2}}{(-3)^n+2^n}$

問題１３（Ａ）　教科書

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{r^n+1}$　　(ただし $r \neq -1$)　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{r^{2n}+1}$

問題１４（Ｂ）

a, b を正の実数とするとき、極限 $c = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$ を考える。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) $a=2, b=2$ のとき、c の値を求めなさい。

(2) $a>2, b=2$ のとき、c の値を求めなさい。

(3) $b=3$ のとき、$c=\dfrac{1}{3}$ となる a の範囲を求めなさい。

(福島大学)

問題１５（Ｂ） 教科書

数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^n\right\}$ が収束するような、実数 x の値の範囲を求めよ。ただし、$x \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$

問題１６（Ａ） 教科書

次の極限を求めよ。ただし、$[x]$ は x を超えなさい最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1}$

問題１７（Ｂ）

実数 x に対して $[x]$ を $m \leqq x < m+1$ を満たす整数 m とする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[10^{2n}\pi\right]}{10^{2n}}$$

を求めよ。 (山梨大学)

問題１８（Ｂ） 教科書

次の極限を求めよ。ただし、「$a > 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$」は既知とする

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(3^n + 2^n)$

問題１９（Ｂ）

$a > 0, b > 0$ とする。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ の極限値を求めよ。

問題２０（Ｂ）

関数 $f(x)\,(x>0)$ を

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(7x+6)^n+(9x)^n}$$

により、定める。「正の実数 a に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$」ということなどから、

$0<x\leqq\boxed{\text{ア}}$ のときには $f(x)=\boxed{\text{イ}}\,x+\boxed{\text{ウ}}$ であり、

$x>\boxed{\text{ア}}$ のときは $f(x)=\boxed{\text{エ}}\,x+\boxed{\text{オ}}$ であることが分かる。

(東京理科大学)

問題２１（Ｃ） 教科書

(1) $h>0$ であるとき、$(1+h)^n>1+nh$ を示せ。ただし、n は２以上の整数。

(2) $r>1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ であることを示せ。

問題２２（Ｃ）

(1) $h>0$ であるとき、$\left(1+\dfrac{h}{n}\right)^n>1+h$ を示せ。ただし、n は２以上の整数。

(2) $a>1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ であることを示せ。

問題２３（Ｃ）

(1) $h>0$ であるとき、$(1+h)^n\geqq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ を示せ。ただし、n は自然数。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ であることを示せ。

問題２４（A）　数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2$

(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} - a_n = 2n$

問題２５（A）　数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$

(2) $a_1 = 4$, $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

問題２６（A）　数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$

(2) $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n - 2$

問題２７（A）　数列 教科書

$a_1 = 4, a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題２８（A）　数列 教科書

$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題２９（B）　数列 教科書

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３０（A）　数列 教科書

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n = n^2 + 4n$ であるとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３１（B）　数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

問題３２（B）　数列

$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３３（C）　数列

$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３４（Ｂ）　数列

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$，$(n+2)a_{n+1} = na_n$

(2) $a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n+3}a_n$

(3) $a_1 = 1$，$(n+3)a_{n+1}2na_n$

問題３５（Ｂ）　数列

$a_1 = 4, a_{n+1} = 8a_n^2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３６（Ｄ）　数列

$a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{3a_n+4}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題３７（Ｄ）　数列

数列 $\{a_n\}$ を、$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) ２つの実数 α と β に対して、$b_n = \dfrac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような α と β $(\alpha > \beta)$ を 1 組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(東北大学)

問題３８（Ａ）　数列 教科書

すべての自然数 n に対して、等式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdot$ ① が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。

問題３９（A）　数列 教科書

すべての自然数 n に対して、不等式
$2^n > n$ が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。

問題４０（A）教科書

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ は既知であるとする。次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ の極限値を求めよ。　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

問題４１（B or C）

数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は漸化式

$$(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0 \ \ (n \geqq 2)$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。b_n を b_{n-1} $(n \geqq 2)$ で表せ。

(2) b_n を n と b_1 を用いて表せ。

(3) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}$ であるとき、a_n を求めよ。

(4) （３）で求めた a_n に対して、$\lim_{n\to\infty}(a_n)^n$ を求めよ。

(関西大学)

問題４２（Ｂ or Ｃ）

a を正の定数とし、次のように定められた２つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a, \ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{4}{a_n}\right) & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ。

(2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ。さらに、b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) b_3, b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ。
　さらに、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(電気通信大学)

問題４３（Ｂ）

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 12,\ b_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) a_2, b_2, a_3, b_3 をそれぞれ求めよ。

(2) すべての自然数 n について、$a_n + b_n = 12$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

(大阪教育大学)

問題４４（Ｃ）

O を原点とする数直線上に、点 $P_n(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次のようにとる。ただし、x_n は点 P_n の座標を表す。

$x_0 = 1$ とする。そして、n が偶数なら、線分 OP_n の中点を P_{n+1} とし、n が奇数なら、線分 P_nP_0 を $1:2$ に内分する点を P_{n+1} とする。このとき、$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、

$$x_{2m+1} = \boxed{}\, x_{2m}$$

$$x_{2m+2} = \boxed{}\, x_{2m+1} + \boxed{}$$

が成り立つ。したがって、

$$x_{2m+2} = \boxed{}\, x_{2m} + \boxed{}$$

となり、

$$\lim_{m\to\infty} x_{2m} = \boxed{}, \quad \lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = \boxed{}$$

を得る。

(日本医科大学)

問題４５（Ｂ） 教科書

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10}$ $(n \geqq 1)$ をみたすものとする。

(1) $|a_{n+1} - 5| \leqq \dfrac{3}{5}|a_n - 5|$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問題４６（Ｂ）

$a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+3}{4}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq a_n < 1$ が成り立つことを、数学的帰納法で示せ。

(2) $1 - a_{n+1} < \dfrac{1 - a_n}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(岡山県立大学)

問題４７（Ｂ or Ｃ）

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1 = 1$, 漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}\ (n \geqq 1)$ により定義する。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) すべての自然数 n に対して、$1 \leqq a_n < 2$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) すべての自然数 n に対して、$2 - a_{n+1} \leqq \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}(2 - a_n)$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(首都大学)

問題４８（Ｂ）

３点 $(0, 0), A(2, 0), B(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle$OAB がある。点 O から辺 AB に引いた垂線を OH_1 とする。次に、点 H_1 から辺 OA に引いた垂線を H_1H_2、点 H_2 から辺 OB に引いた垂線を H_2H_3 、点 H_3 から辺 AB に引いた垂線を H_3H_4 とする。以下、辺 OA, OB, AB 上に、この順で垂線を引くことを繰り返し、点 H_n を決め、線分 $H_{n-1}H_n$ の長さを $a_n\,(n \geqq 2)$ とする。$a_1 = OH_1$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(岐阜薬科大学)

問題４９（Ｄ）

直角三角形 $\triangle$ABC において $\angle$B は直角であるとし、辺 AC の長さを α とする。辺 AC を n 等分し、その分点を A に近い方から順に $D_1, D_2, D_3, \cdots, D_{n-1}$ とおく。$1 \leqq k \leqq n-1$ に対し、線分 BD_k の長さを L_k とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2$ を α と n で表せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ を α で表せ。

(北海道大学)

問題５０（Ｂ） 教科書

n を自然数とする。白玉４個と赤玉８個が入っている袋から、玉を１個取り出し、色を見てからもとにもどす試行を n 回繰り返すとき、白玉が偶数回出る確率を p_n とする。ただし、0 は偶数と考える。

(1) p_{n+1} を p_n で表せ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

(日本女子大学)

問題５１（Ｂ or Ｃ）

$\triangle$ABC の頂点を移動する点 P があり、はじめ頂点 A にいる。その後、１秒後に、以下の規則に従ってその位置を変化させる。

(A) 頂点 A にいるときは、確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 B に移るか、確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 C に移る。

(B) 頂点 B にいるときは、確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 A に移るか、確率 $\dfrac{1}{4}$ で頂点 B にとどまるか、確率 $\dfrac{1}{4}$ で頂点 C に移る。

(C) 頂点 C にいるときは、確率 $\dfrac{1}{2}$ で頂点 A に移るか、確率 $\dfrac{1}{4}$ で頂点 B へ移るか、確率 $\dfrac{1}{4}$ で頂点 C にとどまる。

はじめ頂点 A にいた点 P が n 秒後に頂点 A、頂点 B にいる確率をそれぞれ p_n, q_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_1, q_1, p_2, q_2 を求めよ。
(2) p_{n+1}, q_{n+1} をそれぞれ p_n の式で表せ。
(3) p_n, q_n をそれぞれ n の式で表せ。
(4) $\lim_{n\to\infty} p_n,\ \lim_{n\to\infty} q_n$ をそれぞれ求めよ。

(愛知県立大学)