

# 数学の鉄則

## 「文字を置き換えたときの注意点」

こんにちは河見賢司です。今回の鉄則は「文字を置き換えたときの注意点」です。いきなりですが次の問題を解いてください。

問題

$y = (x^2 - 2x - 1)^2 + 8(x^2 - 2x - 1) + 20$  の最小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。

【解説】

この問題を何も考えずに解いてしまうと、 $(x^2 - 2x - 1)^2$  を展開なんかしてとやる人がいるけど  $(x^2 - 2x - 1)^2$  を展開したら  $x$  の4乗が出てきて、式が4次関数になって考えにくい。そこで、与式が  $(x^2 - 2x - 1)$  のみでできていることを考えて、 $X = x^2 - 2x - 1$  とでも置き換えると与式は  $y = X^2 + 8X + 20$  となり単なる2次関数となり考えやすくなる。

このように最大・最小の問題では文字の置き換えによって考えやすくなることが多いです。

文字の置き換えは式が簡単になるので、よく使いますがひとつだけ注意しないといけないことがあります。

次に典型的な誤答例を書いてみます。

誤答例

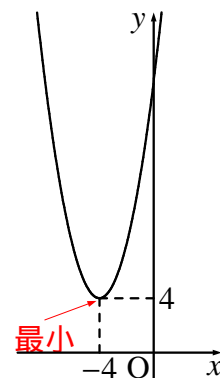
$$y = (x^2 - 2x - 1)^2 + 8(x^2 - 2x - 1) + 20$$

ここで  $x^2 - 2x - 1 = X$  とする

$$y = X^2 + 8X + 20$$

$$= (X + 4)^2 + 4$$

グラフより  $X = -4$  のとき、最小値4をとる



上記の解答はどこが間違っているか分かる？

$X = x^2 - 2x - 1$  と置き換えるまではそれでいいんだけど、上記の解答では置き換えたら絶対に考えないといけないことを忘れてる。まず置き換えについては次のことを覚えておいて下さい。

文字の置き換えたときの注意点

文字を置き換えたときは、  
必ず置き換えた文字の範囲に注意する！

上記の例題でいうと  $X = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$  と式変形できるわけだから、当然  $X$  にも  $X \geq -2$  という範囲がついてくるよね。

上記の誤答例では、文字を置き換えたにもかかわらず置き換えた文字の範囲に注意していなかったから間違ってしまった。こういうことを言うと、私はしっかりと考えているから大丈夫！なんていう人もいるけど、今回の場合分かりやすいから間違える人も少ないかもしれないけど、文字には隠れた範囲がついてくる場合があります。たとえば  $\sin \theta = X$  は  $-1 \leq X \leq 1$  という範囲がついてくるし、 $t = x^2 - 1$  と置き換えたなら  $t \geq -1$  という範囲がついてきます（理由は各自考えてください）。

本当に重要だからもう一度言います。文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の範囲に注意する。一見範囲がなさそうでも、隠れた範囲がついてくる場合があるので、特に慣れるまではしっかり何度も何度も確認するようにしておいて下さい。

【解答】

$x^2 - 2x - 1 = X$  とする。

$X = (x - 1)^2 - 2$  より  $X \geq -2$

$$\begin{aligned} y &= X^2 + 8X + 20 \\ &= (X + 4)^2 + 4 \end{aligned}$$

グラフより  $X = -2$  のとき、最小値 8 をとる。

$X = x^2 - 2x - 1$  より

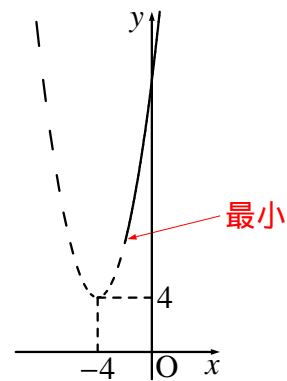
$x^2 - 2x - 1 = -2$  ◀  $X = -2$  に  $x^2 - 2x - 1 = -2$  を代入した

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

以上より、 $x = 1$  のとき最小値 8 をとる。



今回の「文字を置き換えたときの注意点」というのは、本文でも解説しましたが、意外に忘れる人が多いんです。ですから、文字を置き換えたときは、特に慣れるまではひとつくらい、文字を置き換えたら範囲に注意すると頭のなかにたたきこんでおいてください。

もう一度だけ確認しておきます。

文字の置き換えたときの注意点

文字を置き換えたときは、  
必ず置き換えた文字の範囲に注意する！

今回はこれでおしまいです。ここまでプリントを読んでいただきありがとうございます。これからもがんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)