

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

三角関数No13. 「 $\theta = 18^\circ$ に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第13回で $\theta = 18^\circ$ に関する問題です。

$\theta = 18^\circ$ に関する問題とは、 $\sin 18^\circ$ を求めなさいよという問題です。

三角関数の値で求められるのは 30° 、 45° 、 60° などの特別な角度のみです。それ以外にも、例えば $\sin 15^\circ$ だと、 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$ とすることによって、加法定理を使って求めることができます。

でも、この 18° というのは加法定理や半角の公式などを考えても求められそうにありません。これって知らないとまず求めることができないと思いますけど、実は $18^\circ \times 5 = 90^\circ$ を使って求めていきます。

18degの求め方

$\theta = 18^\circ$ のとき、 $5\theta = 90^\circ$ ということを利用する！

それでは、これを踏まえて次の問題を解いてみてください。

問題

$\sin 18^\circ$ の値を求めよ

【解説】

これは、さっき話したように $5\theta = 90^\circ$ を使って解いていくだけです。簡単に解説をしていきます。

$5\theta = 90^\circ$ としました。これから、どうしようかな？と考えるんだけど 5θ なんて言われてもよく分かんない。でも、 2θ や 3θ なら、2倍角や3倍角の公式があるので求めることができるよね。

そこで、 $5\theta = 2\theta + 3\theta$ とします。

$5\theta = 90^\circ$ より、 $2\theta + 3\theta = 90^\circ$ となります。これを变形して $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ とします。

* 「なんで $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ ってしたの？ $3\theta = 90^\circ - 2\theta$ ってしたらダメなの？」と思われたかもしれません。

これから式変形をしたら分かりますが、 $3\theta = 90^\circ - 2\theta$ ってしたらうまく解けないんです。 $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ ならうまくいきます。

これはもう、理屈じゃなく覚えるしかありません。ただ、2通りしかないなので、両方やってみてうまくいったらOKで、うまくいかなければもう一方の方をやってみる、忘れてしまっていたらそんな感じでもいいですよ

$$2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

↑ 2θ と $90^\circ - 3\theta$ の値が等しい時、当然 $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$ も成立

$\sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$ です。これは暗記してもらってもいいですが、いちいち加法定理で展開してもらってもいいですよ。分からないという人は、<http://www.hmg-gen.com/sankaku90.pdf> を見てください。

これで $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ となりました。後は、それぞれ2倍角の公式3倍角の公式を適用するだけです。2倍角や3倍角の公式は暗記しておかないといけません。もし、知らないという人は <http://www.hmg-gen.com/sankakukousiki.pdf> を見てください。

$$\sin 2\theta = \cos 3\theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta \leftarrow 2 \text{倍角の公式、} 3 \text{倍角の公式より}$$

ここで、全ての項に $\cos \theta$ が含まれているので両辺を $\cos \theta$ で割ることにします。

ただ、両辺を文字で割るときは、その文字が0になるかどうか確認をする必要があります。
今回は、 $\theta = 18^\circ$ なので、 $\cos \theta \neq 0$ です。よって、両辺を $\cos \theta$ で割っても OK です。

$$2 \sin \theta \cos \theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

$$2 \sin \theta = -3 + 4 \cos^2 \theta \quad \blacktriangleleft \text{両辺を } \cos \theta \text{ で割った!}$$

で、ここからなんですけど、問題は $\sin \theta$ の値を求めよなんだよね。ということは、与式を $\sin \theta$ のみの式にして、そのできた方程式を解いていけば $\sin \theta$ の値は求めることができるよね。

$2 \sin \theta = -3 + 4 \cos^2 \theta$ で $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ を代入すれば、 $2 \sin \theta = -3 + 4(1 - \sin^2 \theta)$ となってくれます。後は、この方程式を解けば $\sin \theta$ の値を求めることができます。

ながながと説明をしてきましたが、この問題は $18^\circ \times 5 = 90^\circ$ という事だけを覚えておけば簡単ですよ。試験にも意外に出てくるので理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$\theta = 18^\circ$ とする。

$$5\theta = 90^\circ$$

$$2\theta + 3\theta = 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

$$\sin 2\theta = \cos 3\theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta$$

ここで $\cos \theta \neq 0$ より、両辺を $\cos \theta$ でわると

$$2 \sin \theta = -3 + 4 \cos^2 \theta$$

$$2 \sin \theta = -3 + 4(1 - \sin^2 \theta)$$

$$4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$$

解の公式より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

ここで $\sin \theta > 0$ より ◀ $\theta = 18^\circ$ より、当然 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \leftarrow \text{これが答え}$$

これで今回の解説プリントは終わりです。18°の解き方を説明しましたが、これと同じ方法で36°や72°も求めることができます。

それほど、頻出という訳ではありませんが、たまに出てきますので、ぜひともしっかりと覚えておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録

しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司