

三角関数 No15.

「三角形の形状に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第15回で「三角形の形状に関する問題」です。

さっそくですが、以下の問題を解いてください。

問題 1

次の条件を満たす三角形はどのような三角形か？

(1) $c = a \cos B$

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$

【解説】

どのような三角形か？という問題を三角形の形状を問う問題と言います。三角形の形状を問う問題は余弦定理や正弦定理を使って、角度と長さが混じった式を長さのみの式にしてから解いていくことが鉄則です。

また、実際の受験問題で出題される場合、式変形が複雑になる場合が多いですが、三角形の形状は正三角形、二等辺三角形、直角三角形くらいしかないので、答えはいずれかになると頭に叩き込んで計算したら式変形を思いつけると思います。

【解答】

(1)

$$c = a \cos B$$

$$c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \leftarrow \text{余弦定理を使って、辺の長さのみの式にした}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

よって $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。

(2) 正弦定理より、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より $\sin A = \frac{a}{2R}$
 同様に $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ がいえる。

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よって $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である。

では、同じような三角形の形状を問う問題をもう一問解いてもらいます。

問題 2

次の条件を満たす三角形はどのような三角形か？

$$a \cos A = b \cos B$$

【解説】

これも、三角形の形状を問う問題なので、角を消して辺のみの式にしてから解いていきます。

【解答】

$$a \cos A = b \cos B$$

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \leftarrow \text{余弦定理を使い、辺のみの式にした}$$

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a}$$

$$a^2 (b^2 + c^2 - a^2) = b^2 (c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 - a^4 = b^2 c^2 + a^2 b^2 - b^4$$

ここからの式変形は、少し難しいかもしれませんが、最初にもいいましたが、三角形の形状を問う問題は、答えは直角三角形か2等辺三角形くらいしかないです。

4次式ではどういう三角形か説明はできません。2次式なら $a^2 + b^2 = c^2$ などとできます。これなら、直角三角形です。3次や4次のものが出てきたときは、ほとんどの場合因数分解できます。

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0 \quad \blacktriangleleft (a^2 - b^2) \text{ という共通因数ができた。これで因数分解できる！}$$

$$(a^2 - b^2)\{c^2 - (a^2 + b^2)\} = 0$$

$$\text{よって、} a^2 - b^2 = 0 \text{ または } c^2 = a^2 + b^2$$

以上より、 $a = b$ の2等辺三角形または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

これで、今回の解説プリントは終わりです。次回は、三角関数の最終回として、これまで解説しきれなかった有名な問題を解説したいと思います。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com