

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！
<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

三角関数No15. 「三角形の形状に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第15回で「三角形の形状に関する問題」です。

さっそくですが、以下の問題を解いてください。

問題1

次の条件を満たす三角形はどのような三角形か？

(1) $c = a \cos B$

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$

【解説】

どのような三角形か？という問題を三角形の形状を問う問題と言います。三角形の形状を問う問題は余弦定理や正弦定理を使って、角度と長さが混じった式を長さのみの式にしてから解いていくことが鉄則です。

また、実際の受験問題で出題される場合、式変形が複雑になる場合が多いですが、三角形の形状は正三角形、二等辺三角形、直角三角形くらいしかないので、答えはいずれかになると頭に叩き込んで計算したら式変形を思いつけると思います。

【(1) の解答】

$$c = a \cos B$$

$$c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \leftarrow \text{余弦定理を使って、辺の長さのみの式にした}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

よって $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。

【(2) の解答】

正弦定理より、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より $\sin A = \frac{a}{2R}$

同様に $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ がいえる。

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よって $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形である。

では、同じような三角形の形状を問う問題をもう一問解いてもらいます。

問題 2

次の条件を満たす三角形はどのような三角形か？

$$a \cos A = b \cos B$$

【解答】

*これも、三角形の形状を問う問題なので、角を消して辺のみの式にしてから解いていきます。

$$a \cos A = b \cos B$$

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \blacktriangleleft \text{余弦定理を使い、辺のみの式にした}$$

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a}$$

$$a^2 (b^2 + c^2 - a^2) = b^2 (c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 - a^4 = b^2 c^2 + a^2 b^2 - b^4$$

*ここからの式変形は、少し難しいかもしれませんが、最初にもいいましたが、三角形の形状を問う問題は、答えは直角三角形か2等辺三角形くらいしかありません。

4次式ではどういう三角形か説明はできません。2次式なら $a^2 + b^2 = c^2$ などとでてきます。これなら、直角三角形です。3次や4次のものが出てきたときは、ほとんどの場合因数分解できます。

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0 \quad \blacktriangleleft (a^2 - b^2) \text{ という共通因数ができた。これで因数分解できる！}$$

$$(a^2 - b^2) \{c^2 - (a^2 + b^2)\} = 0$$

$$\text{よって、} a^2 - b^2 = 0 \text{ または } c^2 = a^2 + b^2$$

以上より、 $a = b$ の2等辺三角形または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

これで、今回の解説プリントは終わりです。次回は、三角関数の最終回として、これまで解説しきれなかった有名な問題を解説したいと思います。それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司