三角関数No4.
「三角関数の対称式に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第４回「三角関数の対称式に関する問題」です。

対称式のことを理解していないという人は、こちらのプリントで勉強しておいてください。
「対称式のプリント」http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf
「対称式のプリントの解答」http://www.hmg-gen.com/k-taisyousiki.pdf

対称式について、詳しくは上記の対称式のプリントを見てほしいのですが、簡単にいえば文字を入れ替えても元の式と同じ式になる問題です。高校数学の対称式は、２文字のものと３文字のものがありますが、三角関数の対称式で出題されるのは２文字の対称式のときのみなので、ここでは２文字の対称式を簡単に説明します。

対称式とは文字を入れ替えても同じ式になる式のことです。x^2+y^2 は x と y を入れ替えると y^2+x^2 になりますが、これは元の式 x^2+y^2 と同じ式なので対称式です。

対称式の重要な性質として、**全ての対称式は、式変形をすることにより基本対称式のみで表せる**といった性質があります。また２文字の対称式（たとえば x と y の対称式）の場合**基本対称式は** $x+y$ **と** xy です。

与式が x と y の対称式なら、与式は基本対称式 $x+y, xy$ のみを使ってあらわすことができます。

対称式なら、すべてのものが式変形をすることで基本対称式のみで表すことができます。２文字の対称式の中で x^2+y^2 と x^3+y^3 は本当によく出てきます。これらは式変形をすることで簡単に基本対称式のみで表すことができますが、、いちいち導いていたらメンドウなのでこれらの対称式は暗記してください。

覚えるべき対称式

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

だらだらと説明しても分かりにくくなるだけなので、いきなり問題に進みたいと思います。

問題 1

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　　　(2) $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

【解説】

これは $\sin^3\theta + \cos^3\theta,\ \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ はともに $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式だよね。

対称式の問題の常識として、**対称式の問題で、基本対称式の値が与えられていないものは問題を解く前にまず基本対称式の値を求めてから解いていく**というのがありました。もしこのことを知らなければ繰り返しになりますが、対称式のプリントで http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf 勉強しておいてください。

今回の問題は、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式なんだから基本対称式は $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ になります。

$\sin\theta + \cos\theta$ の方の値は求まっているので、後は $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めないといけないよね。普通だったら $x + y$ の値が分かっているとき、xy の値を求めよなんて言われても求めることはできないんだけど三角関数の場合は両辺を 2 乗することによって求めることができます。

$$\begin{aligned}
\sin\theta + \cos\theta &= \frac{1}{2} \\
(\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 && \blacktriangleleft \text{ 両辺を 2 乗した} \\
\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta &= \frac{1}{4} \\
\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{4} \\
1 + 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{4} && \blacktriangleleft\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ より} \\
2\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{4} - 1 && \blacktriangleleft \text{ 右辺の 1 を左辺に移行した} \\
\therefore\ \sin\theta\cos\theta &= -\frac{3}{8} && \blacktriangleleft \text{ もう一方の基本対称式 } \sin\theta\cos\theta \text{ の値が求まった！}
\end{aligned}$$

このように $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式では、どちらか一方の基本対称式 ($\sin\theta + \cos\theta$ *or* $\sin\theta\cos\theta$) の値が求まっていたら、もう一方の基本対称式の値も求めることができます。

基本対称式の値が求まれば、あとは単なるごくごく基本的な対称式の問題です。

【解答】

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき、$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$ となる。

(1)

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$$

$\Uparrow$ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ に $a = \sin\theta,\ \ b = \cos\theta$ を代入

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

(2)

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$= \dfrac{\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \dfrac{\sin^3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ ◀ 通分をした。分数の対称式は通分します

$$= \frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$= \dfrac{\frac{11}{16}}{-\frac{3}{8}}$ ◀ (1) より $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \frac{11}{16}$ と $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$ をそれぞれ代入した

$= -\dfrac{11}{6}$ ◀ これが答え

問題 2

> $\sin\theta + \cos\theta = a$ のとき，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$ の値を求めよ

【解説】

三角関数の問題で $\tan\theta$ が含まれている時、$\tan\theta$ は $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して $\sin\theta, \cos\theta$ のみの式にしてから考えていくということが多いです。

グラフを考えても、加法定理を見ても分かるように tan は sin や cos に比べて少し扱いにくいです。扱いにくい tan ではなく、扱いやすい sin や cos で考えて行くようにしてください。

三角関数の重要な考え方

三角関数の問題で、tan が出てきたときは $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を使い、$\sin\theta$, $\cos\theta$ のみの式にしてから考えることが多い。

今回の問題も、この考えに従うと $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ にしてから考えていきます。$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式だよね。それでは解答に進みます。

【解答】

$\sin\theta + \cos\theta = a$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{a^2-1}{2}$

$\Uparrow$ 対称式の問題では、基本対称式の値が必要。$\sin\theta+\cos\theta = a$ を 2 乗して変形して $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めた。計算の方法は問題 1 のときとまったく同じなので省略しました。確かにこうなっているなということを各自確認しておいてください

$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ◀ tan では考えにくいので、sin と cos の式にした

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ ◀ 分数の対称式はとりあえず通分する

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\frac{a^2-1}{2}}$ ◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$= \dfrac{2}{a^2-1}$ ◀ 分母分子に 2 をかけて、分数の中の分数を消した。これが答え

問題 3

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき、$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ。

【解説】

これまでの問題は $\sin\theta + \cos\theta$ の値が分かっているときの問題でした。今回は $\sin\theta\cos\theta$ の値が分かっているときの問題です。これも $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式なので、基本対称式の値 $(\sin\theta + \cos\theta)$ を求めてから問題を解いていきます。

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$ という関係式から、$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めます。

このタイプの $\sin\theta\cos\theta$ から $\sin\theta+\cos\theta$ の値を求める問題は、出題頻度としてほそれほど高くありませんが、入試でもたまにでてくるのでしっかりと理解しておいてください。

【解答】

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\ &= 1+2\sin\theta\cos\theta \quad \blacktriangleleft\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\text{ より}\\ &= 1+2\,\frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}\text{ を代入した}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \blacktriangleleft\ \sin\theta+\cos\theta\text{ の値が求まった！}$$

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\ &= \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3-3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \quad \blacktriangleleft\ \text{（注）を見よ}\\ &= \pm\frac{6\sqrt{6}}{8}\mp\frac{3\sqrt{6}}{8}\\ &= \pm\frac{3\sqrt{6}}{8} \quad \blacktriangleleft\ \text{これが答え}\end{aligned}$$

（注）　メンドウなので $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を一度に計算しました。もし分からない人は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときと、$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときをそれぞれ計算するようにしてください。

問題 3

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

【解説】

(3) の $\sin^3\theta-\cos^3\theta=\sin^3\theta+(-\cos\theta)^3$ と変形できるので、この式は $\sin\theta$ と $-\cos\theta$ の対称式です。

基本対称式は $\sin\theta(-\cos\theta) = -\sin\theta\cos\theta$ と $\sin\theta + (-\cos\theta) = \sin\theta - \cos\theta$ です。対称式の問題を理解できている人は簡単だと思いますが、$\sin\theta + \cos\theta$ から $\sin\theta - \cos\theta$ を求めるには2乗して求めていきます。

【解答】

(1)

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\sin\theta - \cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta \\ &= (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

(3)

$\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= \sin^3\theta + (-\cos^3\theta)$ ◀ $\sin\theta$ と $-\cos\theta$ の対称式

$= \left\{\sin\theta + (-\cos\theta)\right\}^3 - 3\left\{\sin\theta(-\cos\theta)\right\}\left\{\sin\theta + (-\cos\theta)\right\}$

⇑ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ の式に $a = \sin\theta, b = -\cos\theta$ を代入した

$= (\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)$

$= \left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3 + 3\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)$

$= \pm\frac{7\sqrt{7}}{8} \mp \frac{9\sqrt{7}}{16}$

$= \pm\frac{5\sqrt{7}}{16}$ ◀ これが答え

　今回のプリントはこれで終わりです。今回のところは対称式さえ理解できていたら簡単なところです。このプリントをやってみて、少し難しいなと思った人は対称式のプリントをもう一度解くようにしてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com