

# 三角関数No1.

## 「三角関数の対称式に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は、三角関数の第4回「三角関数の対称式に関する問題」です。

対称式のことを理解していないという人は、こちらのプリントで勉強しておいてください。

「対称式のプリント」 <http://www.hmg-gen.com/taisyouusiki.pdf>

「対称式のプリントの解答」 <http://www.hmg-gen.com/k-taisyouusiki.pdf>

対称式について、詳しくは上記の対称式のプリントを見てほしいのですが、簡単にいえば文字を入れ替えても元の式と同じ式になる問題です。高校数学の対称式は、2文字のものや3文字のものがありますが、三角関数の対称式で出題されるのは2文字の対称式のときのみなので、ここでは2文字の対称式を簡単に説明します。

対称式とは文字を入れ替えても同じ式になる式のことです。 $x^2 + y^2$  は  $x$  と  $y$  を入れ替えると  $y^2 + x^2$  になりますが、これは元の式  $x^2 + y^2$  と同じ式なので対称式です。

対称式の重要な性質として、全ての対称式は、式変形をすることにより基本対称式のみで表せるといった性質があります。また2文字の対称式（たとえば  $x$  と  $y$  の対称式）の場合基本対称式は  $x + y$  と  $xy$  です。

与式が  $x$  と  $y$  の対称式なら、与式は基本対称式  $x + y, xy$  のみを使ってあらわすことができます。

対称式なら、すべてのものが式変形をすることで基本対称式のみで表すことができます。2文字の対称式の中で  $x^2 + y^2$  と  $x^3 + y^3$  は本当によく出てきます。これらは式変形をすることで簡単に基本対称式のみで表すことができますが、いちいち導いていたらメンドウなのでこれらの対称式は暗記してください。

覚えるべき対称式

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

ただだと説明しても分かりにくくなるだけなので、いきなり問題に進みたいと思いま

す。

問題 1

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(2)  $\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$

【問題（1）の解説】

これは  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ ,  $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  はともに  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式だよね。

対称式の問題の常識として、対称式の問題で、基本対称式の値が与えられていないものは問題を解く前にまず基本対称式の値を求めてから解いていくというのがありました。もしこのことを知らなければ繰り返しになりますが、対称式のプリントで <http://www.hmg-gen.com/taisyouwiki.pdf> 勉強しておいてください。

今回の問題は、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式なんだから基本対称式は  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  になります。

$\sin \theta + \cos \theta$  の方の値は求まっているので、後は  $\sin \theta \cos \theta$  の値を求めないといけないよね。普通だったら  $x + y$  の値が分かっているとき、 $xy$  の値を求めよなんて言われても求めることはできないんだけど三角関数の場合は両辺を 2 乗することによって求めることができます。

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \leftarrow \text{両辺を 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} - 1 \quad \leftarrow \text{右辺の 1 を左辺に移行した}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \leftarrow \text{もう一方の基本対称式 } \sin \theta \cos \theta \text{ の値が求まった！}$$

このように  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式では、どちらか一方の基本対称式 ( $\sin \theta + \cos \theta$  or  $\sin \theta \cos \theta$ ) の値が求まっていたら、もう一方の基本対称式の値も求めることができます。

基本対称式の値が求まれば、あとは単なるごくごく基本的な対称式の問題です。

### 【問題（１）の解答】

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき、 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$  となる。

(1)

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

↑  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  に  $a = \sin \theta$ ,  $b = \cos \theta$  を代入

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{11}{16} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

(2)

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした。分数の対称式は通分します}$$

$$= \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{11}{16}}{-\frac{3}{8}} \quad \blacktriangleleft (1) \text{より } \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{11}{16} \text{ と } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= -\frac{11}{6} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

### 問題 2

$\sin \theta + \cos \theta = a$  のとき、 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$  の値を求めよ

### 【問題（２）の解説】

三角関数の問題で  $\tan \theta$  が含まれている時、 $\tan \theta$  は  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を利用して  $\sin \theta, \cos \theta$  の

みの式にしてから考えていくということが多いです。

グラフを考えても、加法定理を見ても分かるように  $\tan$  は  $\sin$  や  $\cos$  に比べて少し扱いにくいです。扱いにくい  $\tan$  ではなく、扱いやすい  $\sin$  や  $\cos$  で考えて行くようにしてください。

### 三角関数の重要な考え方

三角関数の問題で、 $\tan$  が出てきたときは  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を使い、 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  のみの式にしてから考えることが多い。

今回の問題も、この考えに従うと  $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  にしてから考えていきます。 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  は  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式だよな。それでは解答に進みます。

### 【問題（2）の解答】

$$\sin \theta + \cos \theta = a \text{ のとき, } \sin \theta \cos \theta = \frac{a^2 - 1}{2}$$

↑ 対称式の問題では、基本対称式の値が必要。 $\sin \theta + \cos \theta = a$  を2乗して変形して  $\sin \theta \cos \theta$  の値を求めた。計算の方法は問題1のときとまったく同じなので省略しました。確かにこうなっているなどということを各自確認しておいてください

$$\begin{aligned} & \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \leftarrow \tan \text{ では考えにくいので、} \sin \text{ と } \cos \text{ の式にした} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \leftarrow \text{分数の対称式はとりあえず通分する} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{a^2 - 1}{2}} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より} \\ &= \frac{2}{a^2 - 1} \quad \leftarrow \text{分母分子に2をかけて、分数の中の分数を消した。これが答え} \end{aligned}$$

### 問題 3

$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$  のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  の値を求めよ。

#### 【問題（3）の解説】

これまでの問題は  $\sin \theta + \cos \theta$  の値が分かっているときの問題でした。今回は  $\sin \theta \cos \theta$  の値が分かっているときの問題です。これも  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式なので、基本対称式の値 ( $\sin \theta + \cos \theta$ ) を求めてから問題を解いていきます。

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$  という関係式から、 $\sin \theta + \cos \theta$  の値を求めます。

このタイプの  $\sin \theta \cos \theta$  から  $\sin \theta + \cos \theta$  の値を求める問題は、出題頻度としてほそれほど高くありませんが、入試でもたまにでてくるのでしっかりと理解しておいてください。

#### 【問題（3）の解答】

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \quad \leftarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \text{ を代入した} \\ &= \frac{3}{2} \\ \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \sin \theta + \cos \theta \text{ の値が求まった！}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \left( \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \quad \leftarrow \text{(注) を見よ} \\ &= \pm \frac{6\sqrt{6}}{8} \mp \frac{3\sqrt{6}}{8} \\ &= \pm \frac{3\sqrt{6}}{8} \quad \leftarrow \text{これが答え}\end{aligned}$$

(注) メンドウなので  $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  を一度に計算しました。もし分からない人は  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  のときと、 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$  のときをそれぞれ計算するようにしてください。

問題 4

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$  のとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta \cos \theta$

(2)  $\sin \theta - \cos \theta$

(3)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

【問題 (4) の解説】

(3) の  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \sin^3 \theta + (-\cos \theta)^3$  と変形できるので、この式は  $\sin \theta$  と  $-\cos \theta$  の対称式です。

基本対称式は  $\sin \theta(-\cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta$  と  $\sin \theta + (-\cos \theta) = \sin \theta - \cos \theta$  です。対称式の問題を理解できている人は簡単だと思いますが、 $\sin \theta + \cos \theta$  から  $\sin \theta - \cos \theta$  を求めるには 2 乗して求めていきます。

【問題 (4) の解答】

(1)

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2)

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(3)

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$$

$$= \sin^3 \theta + (-\cos^3 \theta) \quad \blacktriangleleft \text{sin } \theta \text{ と } -\cos \theta \text{ の対称式}$$

$$= \left\{ \sin \theta + (-\cos \theta) \right\}^3 - 3 \left\{ \sin \theta (-\cos \theta) \right\} \left\{ \sin \theta + (-\cos \theta) \right\}$$

$\uparrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$  の式に  $a = \sin \theta, b = -\cos \theta$  を代入した

$$= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \left( \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \right)^3 + 3 \left( \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left( -\frac{3}{8} \right)$$

$$= \pm \frac{7\sqrt{7}}{8} \mp \frac{9\sqrt{7}}{16}$$

$$= \pm \frac{5\sqrt{7}}{16} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

今回のプリントはこれで終わりです。今回のところは対称式さえ理解できていたら簡単などころです。このプリントをやってみて、少し難しいなど思った人は対称式のプリントをもう一度解くようにしてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)



河見賢司