三角関数No6.

「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題 PART1.」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第６回。
「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題 PART1.」です。

三角関数の最大値・最小値の問題は、ほとんどの問題で文字の置き換えをすることにより解いていきます。文字の置き換えをした後は単なる２次関数や３次関数の最大値・最小値の問題になることが多いです。

文字の置き換え方は何通りかありますが、次の５パターンを覚えておけば十分です。

① $\sin\theta = X$ とする。　② $\cos\theta = X$ とする。　③ $\sin\theta + \cos\theta = X$ とする。
④ $\sin\theta - \cos\theta = X$ とする。　⑤ $\sin\theta\cos\theta = X$ とする。

三角関数の最大値・最小値の考え方は後で説明していきます。三角関数の最大値・最小値以前で、最大値・最小値問題を理解できていない人も多いと思うので、少し最大値・最小値問題の話をします。最大値・最小値問題についてはまずは次のことを覚えておいてください。

最大値・最小値問題の考え方

関数の最大値・最小値の問題はグラフをかいて解く！

この原則に従って三角関数の最大値・最小値の問題を解いていきたいんだけど、たとえば $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2$ の最大値・最小値を求めよという問題が出題されたとします。

最大値・最小値の問題の原則通りグラフをかいて考えたいんだけど $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2$ のグラフはがんばったらかけるけど、少しメンドウだよね。

そこで、文字の置き換えがでてきます。$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2$ は $\sin\theta$ のみの式だから、$\sin\theta = X$ とでも置き換えたら $y = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2$ は $y = X^2 + 2X + 2$ となります。これだったら単なる２次関数だから簡単にグラフがかけるよね。

でも、文字を置き換えた時はひとつだけ注意点があります。

文字を置き換えた時の注意点

文字を置き換えた時は、必ず置き換えた文字の範囲に注意する！

今回は $\sin\theta = X$ って置き換えたんだけど $\sin\theta$ は $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ ととりうる値の範囲が決まっています。$\sin\theta = X$ として $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なんだから当然 X にも、$-1 \leqq X \leqq 1$ という範囲が付いてきます。

このことから、$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2$ の最大値・最小値は $y = X^2 + 2X + 2$ の $-1 \leqq X \leqq 1$ の範囲における最大値・最小値と一致します。

以上が、最大値・最小値の大雑把な考え方です。最大値・最小値についてはこちらのプリントでも紹介しているので、自信のない人はこのプリントも見ることにしてください。

「文字を置き換える時の注意点」http://www.hmg-gen.com/okikae.pdf

では、今回のテーマ。置き換えの必要な最大値・最小値問題に進みます。

数学では変数が多ければ多いほど考えにくいという鉄則があります。ですから**数学の問題で変数を減らすことができるときは、何よりもまず変数を減らしてから考える**ということも覚えておいてください。

たとえば $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の最大値・最小値の問題では $\sin\theta$ という変数と $\cos\theta$ という変数があります。

この式は三角関数の相互関係式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を利用して、
$y = \sin^2\theta + \cos\theta \Rightarrow y = (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta$ という式に変形します。

もともとの式 $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ は変数が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のふたつだったけど、変形した式 $y = (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta$ だったら変数は $\cos\theta$ のみとなって考えやすくなったよね。

高校数学では２変数関数（ひとつの式に変数が２つある）の最大値・最小値はあまり出題されません。２変数関数の最大値・最小値も出題されることもありますが、基本的に難しい問題が多く、ほとんどの場合少し式変形をすることで１変数関数にすることができます。

ですから、三角関数の問題では文字を置き換えることによって、１変数関数にしてから

解いていくということを覚えておいてください。。

そして、文字の置き換え方ですが種類はそれほど多くありません。プリントの最初の方でも話しましたが、置き換え方は次の５通りです。

① $\sin\theta = X$ とする。　② $\cos\theta = X$ とする。　③ $\sin\theta + \cos\theta = X$ とする。

④ $\sin\theta - \cos\theta = X$ とする。　⑤ $\sin\theta\cos\theta = X$ とする。

三角関数の最大値・最小値問題で上記に当てはまらない置き換えが出ることはほとんどありません。これ以外の置き換えが出るときは、まず間違いなく誘導があります。

今回は、その中でも最も基本的で一番よく出題される①と②のパターンの説明をします。

問題１

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$y = 2\cos^2\theta - 4\sin\theta + 1$ の最大値・最小値。およびそれらを与える θ の値を求めよ。

【解説】

三角関数の式変形で次のことは覚えておいてください。

三角関数の式変形のポイント

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ より、$\sin^2\theta$ は $\cos\theta$ のみの式となる！

$\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ より、$\cos^2\theta$ は $\sin\theta$ のみの式となる！

$$\cos 2\theta = \begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 1 - 2\sin^2\theta \\ 2\cos^2\theta - 1 \end{cases}$$

より、$\cos 2\theta$ は $\sin\theta$ のみの式に変形できるし、$\cos\theta$ のみの式に変形できる！

三角関数の問題が出てきたら上記３つの式に注目して解いていってください。特に $\cos\theta$ の２倍角は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の２通りで表すことができるのでしっかりと覚えておいてください。

今回の問題は $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を代入すると y は $\sin\theta$ のみの式になってくれるので、これを利用して解いていきます。

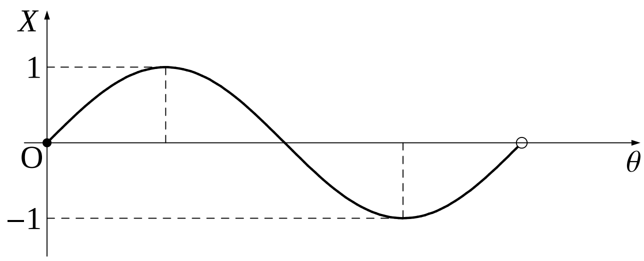
$y = 2\cos^2\theta - 4\sin\theta + 1$

$= 2(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta + 1$ ◀ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を代入して sin のみの式にした

$= -2\sin^2\theta - 4\sin\theta + 3$

与式が $\sin\theta$ のみの式になってくれたから、$\sin\theta = X$ って置き換えて解いていくんだよね。繰り返しになるけど文字を置き換えた時は置き換えた文字の範囲に注意するということを忘れないようにしてください。置き換えした時は、範囲は？とすぐに考えられるようにしておいてください。

$X = \sin\theta$ っておいたんだけど、X の値の範囲ってようするに X の最大値・最小値を求めることと同じことだよね。最大値・最小値問題はグラフをかいて考えるのが基本だったから、今回も $X = \sin\theta$ のグラフをかくと簡単に求めることができます。



上図より、$\sin\theta$ の値の範囲は $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ よって、$-1 \leqq X \leqq 1$ ◀ これが求めたい X の値の範囲となる

ここまでの式変形より、$y = 2\cos^2\theta - 4\sin\theta + 1$ の最大値・最小値は、$y = -2X^2 - 4X + 3$ の $-1 \leqq X \leqq 1$ の値の範囲における最大値・最小値と一致します。

ここまで来たら後は簡単な 2 次関数の最大値、最小値の問題だから簡単だよね。では、解答に進みます。

【解答】

$y = 2\cos^2\theta - 4\sin\theta + 1$

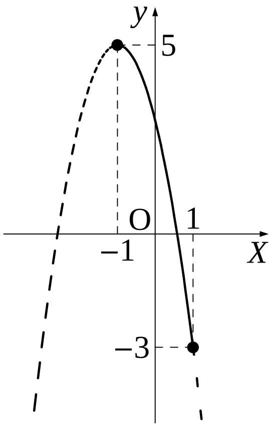
$= 2(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta + 1$ ◀ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を代入して sin のみの式にした

$= -2\sin^2\theta - 4\sin\theta + 3$

ここで $\sin\theta = X$ とする。$-1 \leqq X \leqq 1$ ◀ 置き換えた時は、範囲に注意 となる

$= -2X^2 - 4X + 3$

$= -2(X + 1)^2 + 5$ ◀ 2 次関数のグラフをかくために平方完成をした



グラフより $X=-1$ のとき、最大値 5 をとり、$X=1$ のとき、最小値 -3 をとる。

また $X=\sin\theta$ より $X=-1$ のとき $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$、$X=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

以上より、$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最大値 5 をとり、$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 -3 をとる。

では、次の問題に進みます。

問題 2

$y=\cos 2\theta+\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】
$\cos 2\theta$ は $\sin\theta$ のみの式にも $\cos\theta$ のみの式にもできるんだったよね。今回は $\sin\theta$ のみの式にしてから解いていきます。

【解答】
$y=\cos 2\theta+\sin\theta$

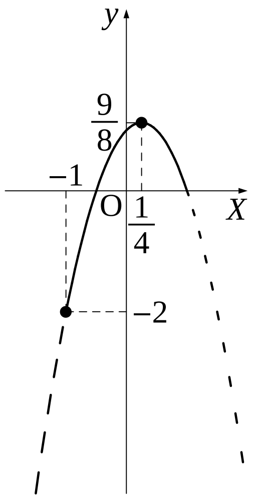
$=1-2\sin^2\theta+\sin\theta$ ◀ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ を代入して sin のみの式にした

$=-2\sin^2\theta+\sin\theta+1$ ◀ $\sin\theta$ のみの式になった

ここで $\sin\theta=X$ $(-1\leqq X\leqq 1$ ◀ 置き換えた時は範囲に注意 !) とする。

$=-2X^2+X+1$

$=-2(X-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{9}{8}$ ◀ グラフをかくために平方完成をした



グラフより、$X=\frac{1}{4}$ のとき最大値 $\frac{9}{8}$ をとり、$X=-1$ のとき最小値 -2 をとる。

よって y の最大値は $\frac{9}{8}$、最小値は -2 となる。

（注）この問題で最大値・最小値をとるときのそれぞれの θ の値を求めなくていいの？って思った人もいると思うけど、今回の問題は問題１と違いそのときの θ の値を求めよと問題文に書かれていないので、求める必要はないです。最大値・最小値問題では学校で問題を解くとき、そのときの値を求めよと問題文に書かれていなくても求めていったと思います。数学の問題では基本的に書かれていないことはやらなくていいのですが、あまりに簡単に求められる時は求めておいたほうがベターかもしれません。

これで今回のプリントは終了です。

三角関数を理解してもらうのが目的ですから、問題自体は簡単にしています。でも、複雑な問題でもまったく同じように解くことができます。

今回のプリントが理解できて、類似した問題が解けないというのなら三角関数ではなく２次関数が理解できていないということが原因です。ですから２次関数の勉強をしっかりとしておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com