

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

---

## 三角関数No7.

「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART2.」

こんにちは、河見賢司です。

このプリントは三角関数の第7回。

「置き換えの必要な三角関数の最大値・最小値の問題PART2.」です。

三角関数には、文字の置き換えの必要な最大値・最小値問題がよく出題されます。

前回でもお話ししましたが、実際の大学受験で出題される文字の置き換えは次の5パターンくらいです。

- ①  $\sin \theta = t$  とする。      ②  $\cos \theta = t$  とする。      ③  $\sin \theta + \cos \theta = t$  とする。  
④  $\sin \theta - \cos \theta = t$  とする。      ⑤  $\sin \theta \cos \theta = t$  とする。

前回のプリント (<http://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf>) で①と②を解説しました。今回は③のパターンの置き換えを解説していきます。

このタイプの問題は、問題を解くにあたり三角関数の合成という知識が必要になるので、まずは三角関数の合成を覚えてください。

### 三角関数の合成について

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

上記の三角関数の合成が成立していることは、三角関数の加法定理で簡単に確認することができます。簡単だとは思いますが一応証明しておきますね。

$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$  の証明

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ のとき}$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \text{ を示す。}$$

$$(\text{右辺}) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \quad \blacktriangleleft \text{加法定理で展開した}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta \cos \alpha + \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta \sin \alpha$$

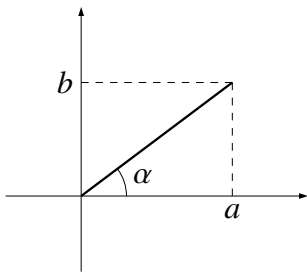
$$\text{ここで } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ をそれぞれ代入して}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \sqrt{a^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta$$

$$= a \sin \theta + b \cos \theta = (\text{右辺}) //$$

$\alpha$  なんですけど、 $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  からいちいち求めてもらってもいいんですが、次のように図から求めるほうが簡単です。

$\alpha$  の求め方

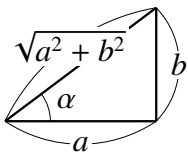


ステップ1  $\sin \theta$  の係数  $a$  を  $x$  軸上にかく

ステップ2  $\cos \theta$  の係数  $b$  を  $y$  軸上にかく

ステップ3  $(a, b)$  から原点に線を引き、その線分が  $x$  軸と正の向きとなす角が  $\alpha$  となる！

上記の  $\alpha$  は確かに  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  が成立しているなっているのはすぐに分かる？これはすぐに分かって欲しいんだけど、三角関数の定義を考えれば明らかだよな。



左図より、三角定数の定義を使い

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ となる。}$$

三角関数の合成について  $\alpha$  は  $x$  軸の正方向（時計まわり）と定義しているので反対の回転（反時計まわり）の場合、 $\alpha$  はマイナスになります。

あと  $\alpha$  は  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  のように具体的な角度が求まるときとそうでないものがあります。具体的に求められないときはそのまま  $\alpha$  を使って解いていきます。

三角関数の合成ですが、たまに「 $a \sin 2\theta + b \cos 2\theta$  でもできるんですか？」と質問してくる人がいますが、合成は  $a \sin \circ + b \cos \circ$  の  $\circ$  の部分が同じであったらどんなものでも合成できます。

三角関数の合成は、 $\sin$  でなく  $\cos$  で合成することができます。 $\cos$  で合成した方が  $\sin$  で合成するより簡単な場合もありますが、それほど変わらないので私はいつも  $\sin$  で合成するようにしています。

ただ、問題で誘導されていてどうしても  $\cos$  で合成をしないといけないときは、その場で加法定理から導くようにしています。

では、このプリントの本題に進みます。まずは、次の問題を解いていってください。

## 問題

関数  $f(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta + 2$  について、次の問いに答えよ。  
ただし  $0 \leq \theta \leq \pi$  とする。

- (1)  $t = \sin \theta + \cos \theta$  とおいて、 $f(\theta)$  を  $t$  の式で表せ。
- (2)  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ
- (3)  $f(\theta)$  の最大値と最小値を求めよ。

### 【(1) の解説】

$f(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta + 2$  の変数は  $\sin \theta \cos \theta$  と  $\sin \theta + \cos \theta$  の2種類であり  $\sin \theta + \cos \theta = t$  っておくんだから  $\sin \theta \cos \theta$  をなんとか  $t$  を用いて表すことができれば  $f(\theta)$  は  $t$  のみを使って表せるよね。

$\sin \theta + \cos \theta = t$  と  $\sin \theta + \cos \theta$  の値が分かっているときは、両辺を2乗したら  $\sin \theta \cos \theta$  の値が求まるってことは覚えてる？

このあたりが分からない人は、「三角関数の対称式の問題」<http://www.hmg-gen.com/sankaku4.pdf> を見てください。それでは解答に進みます。

### 【(1) の解答】

$$\sin \theta + \cos \theta = t$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = t^2 \quad \leftarrow \text{両辺を2乗した}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = t^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = t^2 \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2} \quad \leftarrow \sin \theta \cos \theta \text{ を } t \text{ で表せた}$$

$$f(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta + 2$$

$$= 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} + t + 2 \quad \leftarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}, \sin \theta + \cos \theta = t \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= t^2 - 1 + t + 2$$

$$= t^2 + t + 1 \quad \leftarrow \text{これが答え!}$$

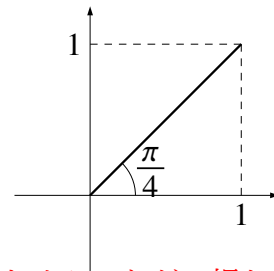
## 【(2) の解説】

「 $t$ のとりうる値の範囲を求めよ」とは $t$ の最大値・最小値を求めなさいよとほぼ同じです。関数の最大値・最小値問題の基本はグラフをかいて解いていきます。今回  $\sin \theta + \cos \theta$  のグラフは先ほど説明をした三角関数の合成をしたらグラフをかくことができるようになるので、まずは合成をして、それからグラフを書いていきます。

$a \sin \theta + b \cos \theta$  のような形に表されているときは三角関数の合成を使うのでは? と考えるようにしてください。

## 【(2) の解答】

$$t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad \leftarrow \text{合成をした}$$



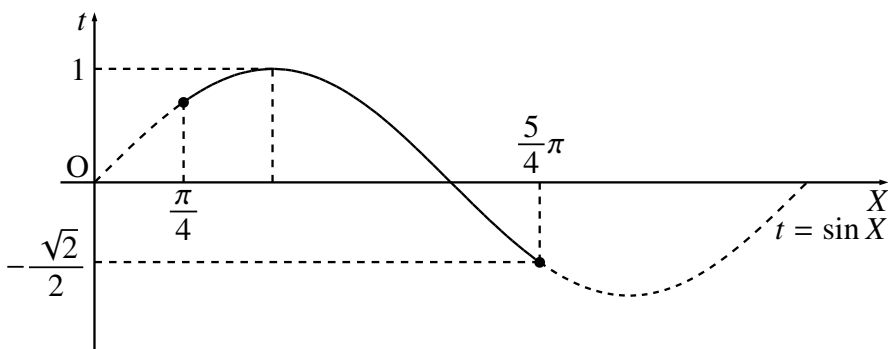
ここで  $\theta + \frac{\pi}{4} = X$  とする。

↑ 慣れてきたら  $\theta + \frac{\pi}{4}$  のままでわざわざ置き換える必要はありません。ただ、慣れるまでは置き換えておいて方が分かりやすいと思います。

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \text{文字を置き換えた時は範囲に注意する。}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{5}{4}\pi$$



グラフより

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin X \leq 1$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad \blacktriangleleft X = \theta + \frac{\pi}{4} \text{ を代入}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \quad \blacktriangleleft \text{全ての辺に } \sqrt{2} \text{ をかけた}$$

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad \blacktriangleleft t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ を代入し } t \text{ の値の範囲が求まった}$$

### 【(3) の解答】

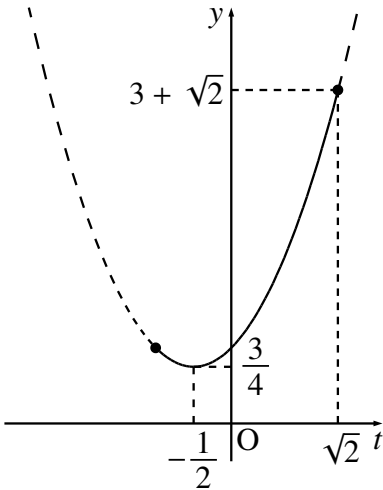
\*この問題は(1)、(2)を使って解いていきます。(1)、(2)を使えば単なる2次関数の問題となりますよ。

$f(\theta)$  の最大値と最小値は

$f(\theta) = t^2 + t + 1$  の  $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$  の最大値と最小値と一致する。  $\blacktriangleleft$  (1) (2) より

$$f(\theta) = t^2 + t + 1$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \blacktriangleleft \text{平方完成をした!}$$



グラフより、 $t = -\frac{1}{2}$  のとき最小値  $\frac{3}{4}$ 、 $t = \sqrt{2}$  のとき最大値  $3 + \sqrt{2}$  をとる。

---

今回解いてもらった問題は、親切にも  $\sin \theta + \cos \theta = t$  としると誘導がついています。で

も、実際の大学受験の問題はこういった誘導が見つからないことも多いです。

三角関数の問題で与式が  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  のみの式だったら  $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおいていくということを覚えておいてください。

また、 $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の対称式の基本対称式は  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  なので、与式が  $\sin$  と  $\cos$  の対称式のときは、 $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおくと与式は  $t$  のみで表すことができます。ただ、与式が  $\sin$  と  $\cos$  の対称式だからといって必ず  $\sin \theta + \cos \theta$  とおくとは限りません。これは今後また話しますが  $\sin \theta \cos \theta = t$  とおいた方が楽な場合があります。

とにかく、与式が  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  で表されているときは、 $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおいていくということを覚えておいてください。

今回のプリントはこれで終了です。今回のところは受験でも頻出です。三角関数の問題では、最初にどういうふう置き換えるかが重要になりますが、与式が  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  のみで表されているときは、 $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおいて解いていくということをしっかりと覚えておいてください。

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司