グラフを使って解く、三角関数の方程式

今回は三角関数のグラフを使って、三角関数の方程式を解いていきます。

今回解説するところは、多くの人が単位円を使って理解していると思います。もちろん単位円でも解けないことないですが、グラフで考えた方が考えやすいと思います。方程式ならまだいいですが、不等式になると圧倒的にグラフで考えたほうがラクだと思います。

これを機に、グラフを使ってで三角関数の方程式を解くという手法を覚えてください。

実際に方程式を解く前に、次の値は覚えるようにしてください。

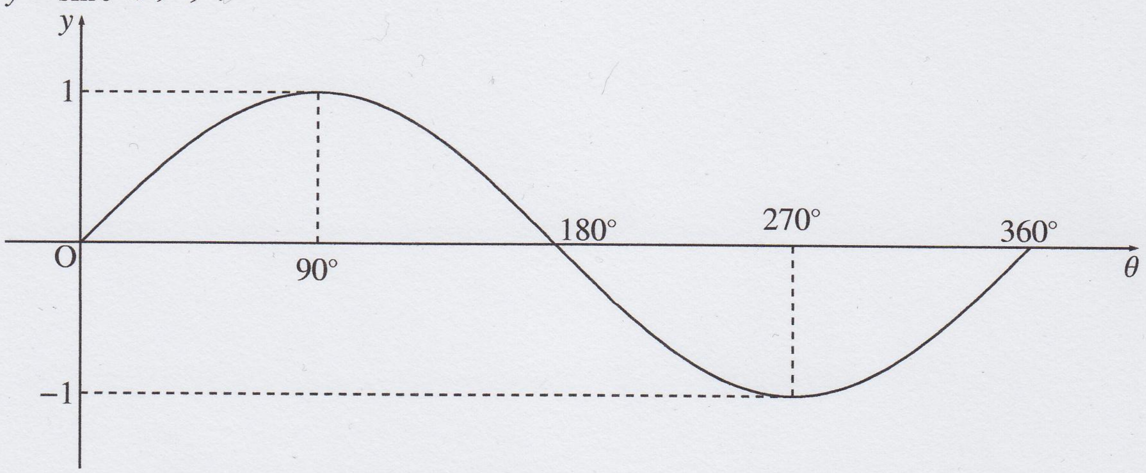
	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	×

上記は作図によって簡単に求められると思いますが、三角関数の基本となるところなので最低限 sin と cos は暗記するようにしてください。tan は sin, cos に比べてあまり出てこないので、その場で図をかいて求めてもらっても別にいいです。でも、何回も出てくるので勉強しているうちに暗記してしまっていると思います。

三角関数のグラフなんですが、本当に対称性のかたまりなんです。この対称性さえ理解してしまえば、上記の表の値 $0°$ から $90°$ まで覚えてしまえば高校数学で必要な三角関数の値をすべて求めることができます。

では、三角関数のグラフに進みます。グラフは孤度法の方が一般的だと思いますが、ほとんどの人が孤度法より度数法の方が慣れていると思うので、このプリントでは度数法で進めていきます。

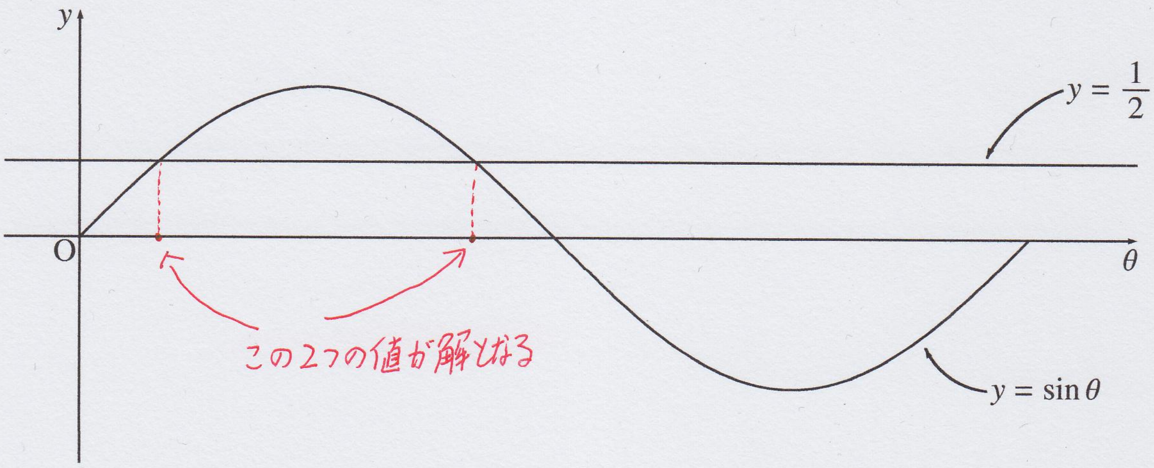
$y = \sin\theta$ のグラフ



グラフを見てもらえば分かると思うけど、$y = \sin\theta$ のグラフは $x = 90°$ や $x = 270°$ について線対称だし、$x = 180°$ については点対称です。この対称性を使って三角関数の値を求めていきます。

じゃあ、実際にこのグラフの対称性をどうやって利用するか $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 360°)$ という簡単な方程式を使いながら説明していきます。

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ の方程式の解は $y = \sin\theta$ と $y = \frac{1}{2}$ のグラフの交点です。

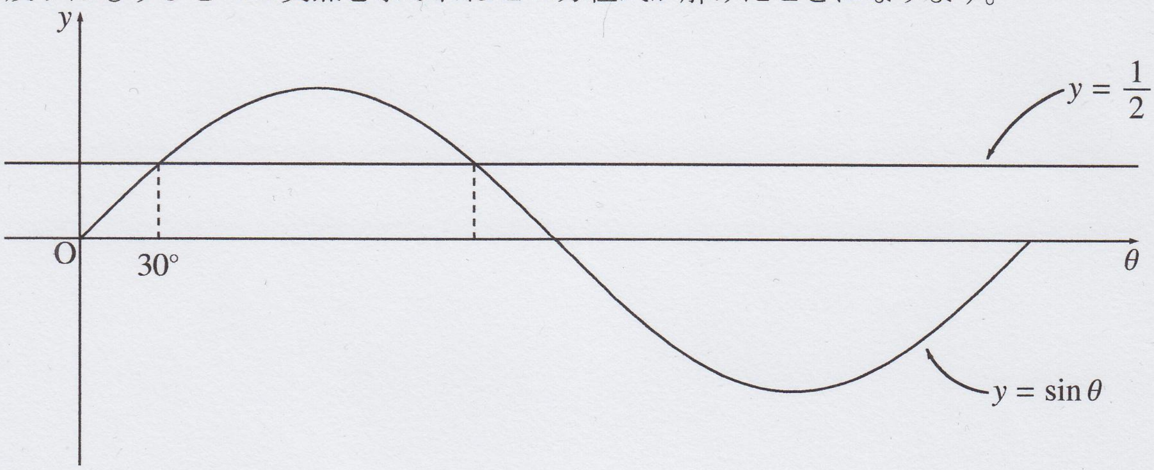


これから交点の求め方を解説していきます。まずは $y = \sin\theta$ と $y = \frac{1}{2}$ の交点を $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲で求めます。$0° \leqq \theta \leqq 90°$ 交点は一番最初に解説した表を見てもらえばすぐに

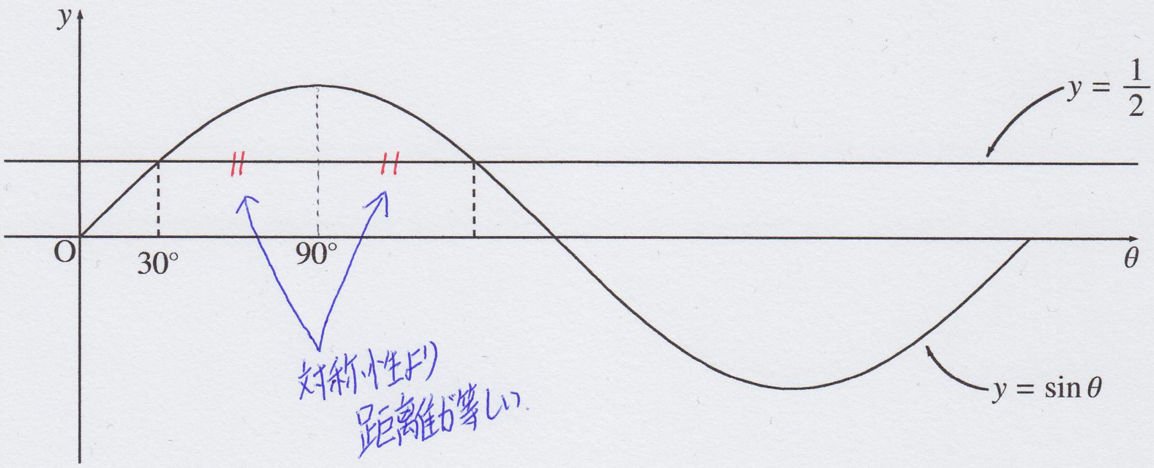
分かると思います。

表を見てもらえばすぐに分かりますが、$y = \sin\theta$ と $y = \dfrac{1}{2}$ の $0° \leqq \theta \leqq 90°$ における交点は $\theta = 30°$ です。

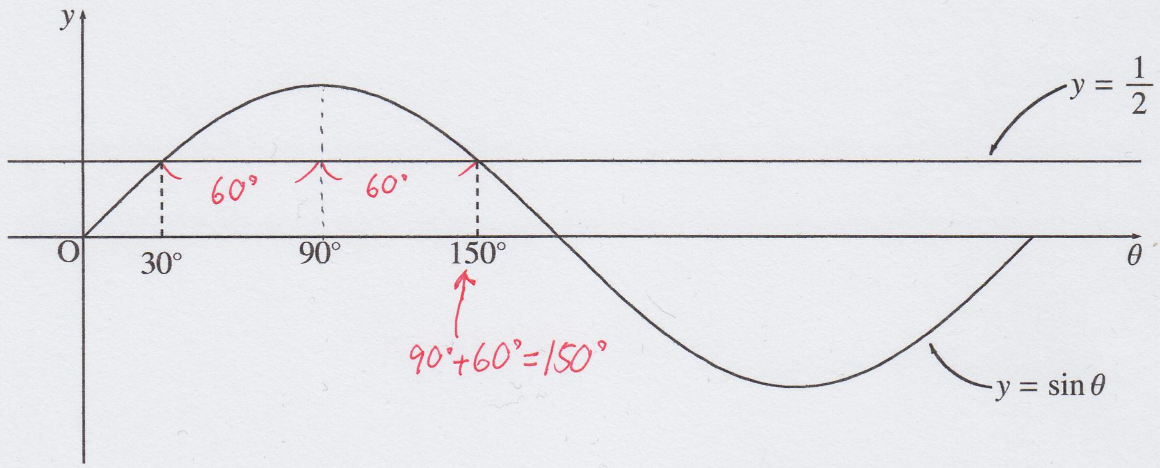
残りはもうひとつの交点を求めればこの方程式が解けたことになります。



ここからはグラフの対称性を使って求めていきます。$y = \sin\theta$ は $x = 90°$ について線対称です。ということは $90°$ からひとつ目の解 $30°$ までの距離ともうひとつの解までの距離は等しくなります。



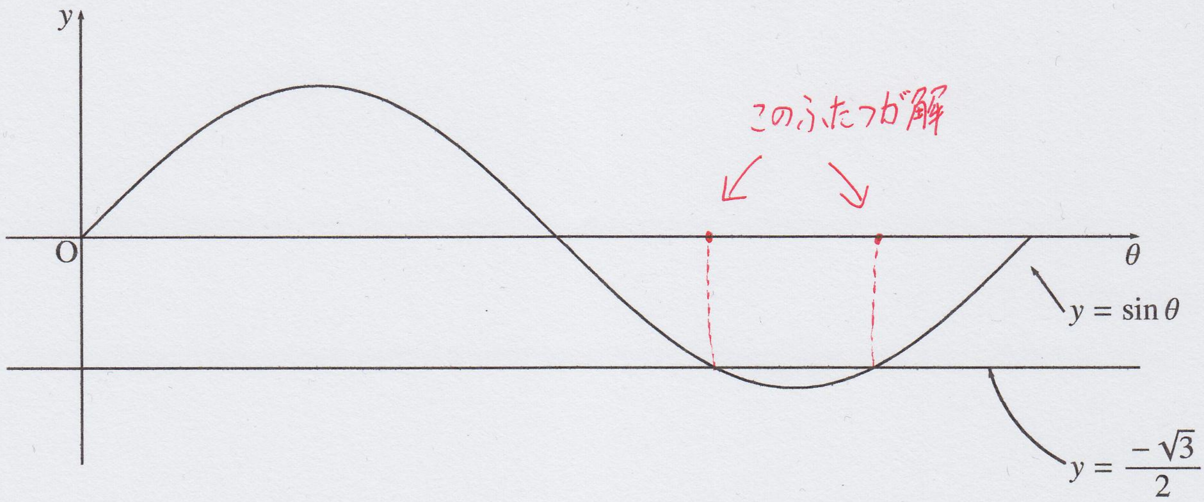
$30°$ は $90°$ までの距離が $60°$ あるので、もうひとつの解も $90°$ からの距離が $60°$。もうひとつの解は $90°$ より $60°$ 大きいので $90° + 60° = 150°$ となります。



よって $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 360°)$ の解は $\theta =$ 30°, 150° です。

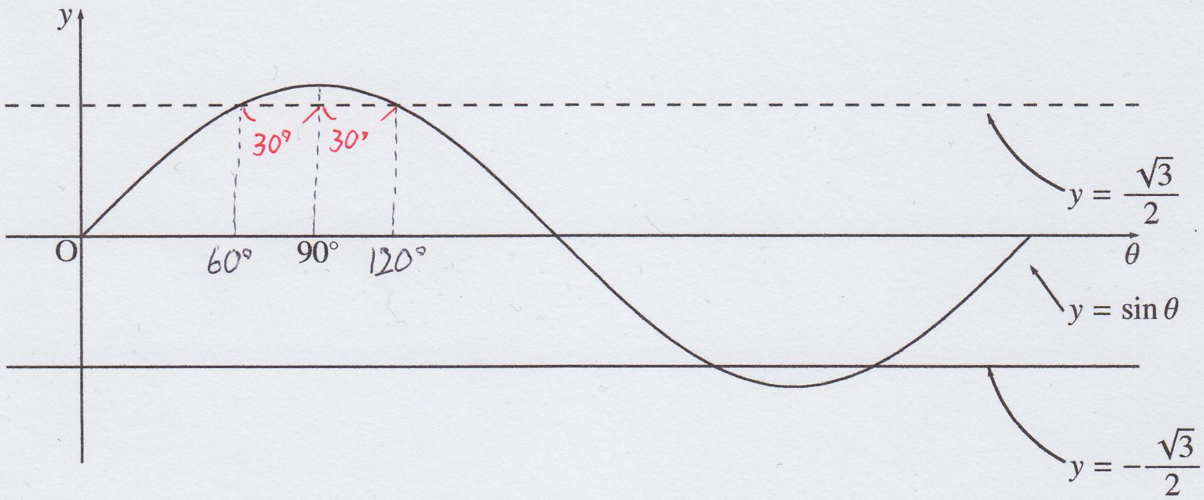
このように三角関数の方程式は、グラフの対称性さえ理解していれば本当に簡単に解けてしまいます。

次は $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 360°)$ を解いてみます。

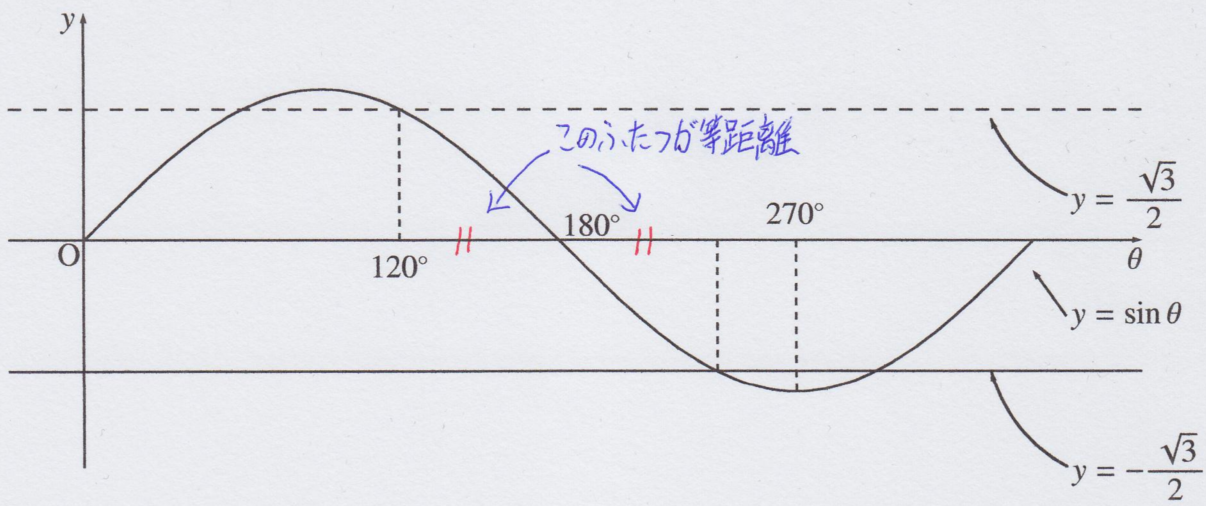


さっき解いた $\sin\theta = \frac{1}{2}$ と同じように、まずは $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の中からグラフの交点を見つけるんだけど、今回は無理というか $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲に交点はないよね。今回のようなときはまず $y = \sin\theta$ と $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ との交点を求め、あとは $y = \sin\theta$ が $\theta = 180°$ について

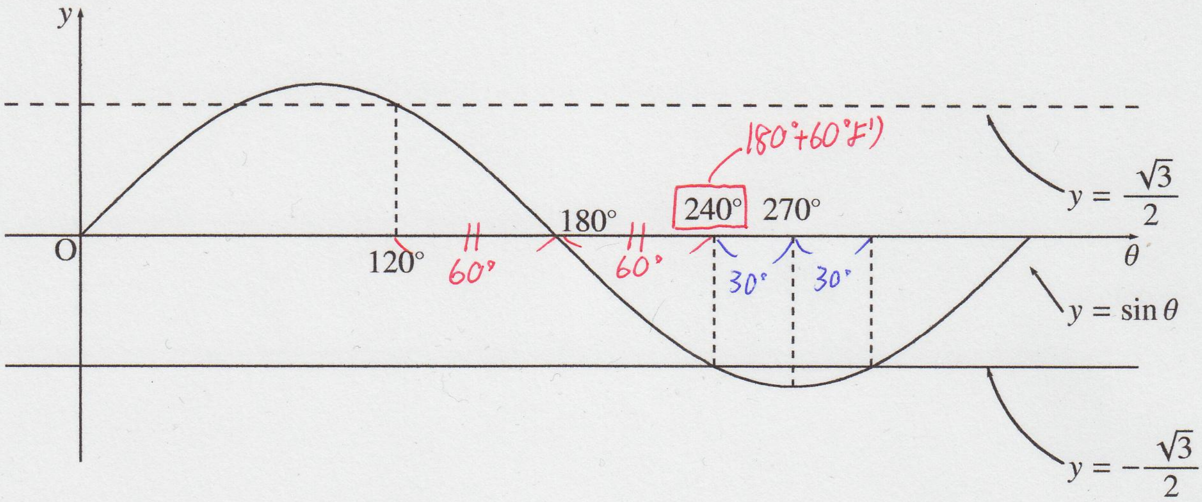
点対称であることを利用して問題を解いていきます。



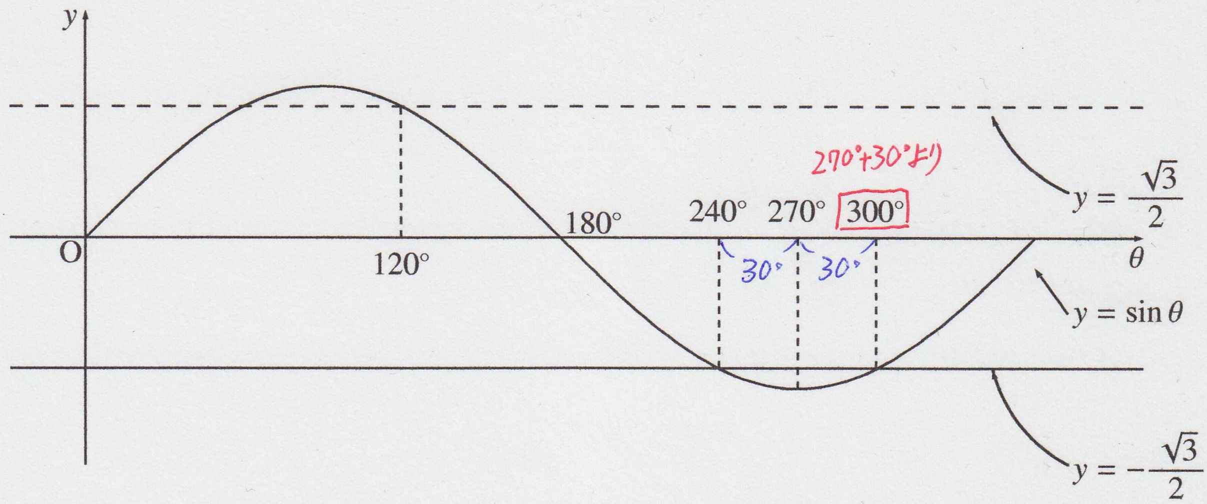
まずは表を使って $y = \sin\theta$ と $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ との交点を調べます。表より交点は $\theta = 60°$ と分かります。また、$y = \sin\theta$ は $x = 90°$ について対称なので、対称性よりもう一方の交点は $\theta = 120°$ となります。



ここから $y = \sin\theta$ の $x = 180°$ について点対称であるといくことから $y = \sin\theta$ と $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の交点のうち $180° \leqq \theta \leqq 270°$ の方を求めていきます。求め方は今までやってきたことと同じです。点対称の性質より 120° から 180° までの距離と、求める交点から 180° までの距離は同じです。120° から 180° は 60° なので、もうひとつの交点は 180° より右側に 60° 右側に進んだ $180° + 60° = 240°$ となります。



あとは $y=\sin\theta$ と $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ との交点のうち $270° \leqq \theta \leqq 360°$ にあるものを求めます。これは $y=\sin\theta$ が $x=270°$ について対称であることを使って求めていきます。もう簡単だよね？



よって $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 360°)$ の解は $\theta=240°,\ 300°$ です。

以上で今回のプリントは終わりです。今回はスペースの関係で cos や tan の方程式は解いていません。似たような問題が教科書や問題集に載っているので各自解いておいてください。解き方としては今回やってもらった解法とまったく同じなので、すぐに理解できると思います。

三角関数は、特に理系の人にとっては本当に重要な単元です。数学Ⅲを解くときは三角関数はあくまで数学Ⅲを解くための道具といった形で必要となります。だから三角関数を理解していないと、数学Ⅲの問題は解けません。それだけ重要な単元ですので、しっ

かりと勉強しておいてください。

河見賢司

数学の偏差値を５０から６０にするサイト
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com