問題２０

定数 A, B, C を $\dfrac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-2}$ が成立するように選ぶと $A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$ である。

したがって、$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}\,dx = \boxed{}$ である。

(同志社大学)

【問題２０の解説】

今回は、誘導付きの問題ですが問題２１のように誘導がない場合もあります。以下のように部分分数分解ができるということを覚えておいてください。

部分分数分解（その４）

$\boldsymbol{\dfrac{\cdots}{(x+a)(x+b)^2} = \dfrac{\alpha}{x+a} + \dfrac{\beta}{x+b} + \dfrac{\gamma}{(x+b)^2}}$ と部分分数分解できる。ただし、a, b, c は定数

「あれ？さっきとなんだか違うな」なんて思う人がいると思います。部分分数分解その３の知識を使うと、この分数は

$$\frac{\cdots}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{\alpha}{x+a} + \frac{Ax+B}{(x+b)^2}$$

と部分分数分解できます。今回の分数もこのように部分分数分解できます。ただ、ここからさらに変形します。右側の $\dfrac{Ax+B}{(x+b)^2}$ を

$$\begin{aligned}
&\frac{Ax+B}{(x+b)^2} \\
=&\frac{A(x+b)-Ab+B}{(x+b)^2} \\
=&\frac{A(x+b)}{(x+b)^2} + \frac{-Ab+B}{(x+b)^2} \\
=&\frac{A}{x+b} + \frac{-Ab+B}{(x+b)^2}
\end{aligned}$$

上記のように変形できます。

$A=\beta, -Ab+B=\gamma$ とでもおいてみると $\dfrac{Ax+B}{(x+b)^2}=\dfrac{\beta}{x+b}+\dfrac{\gamma}{(x+b)^2}$ と変形でき、上記の部分分数分解（その４）が成立しているということを確認できると思います。

部分分数分解（その４）の理屈は上記の通りなんだけど、これはよく出てきます。しっかりと覚えておいてくださいね。それでは、解答に進みます。

【問題２０の解答】

$\dfrac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$ は x の恒等式である。両辺に $(x+1)^2(x-2)$ をかけた式も x の恒等式である。

$x^2+5=A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2 \cdots ①$

＊数値代入法の方がラクそうなので数値代入法で解いていきます。$x=-1, x=2$ を代入するのは形から判断できます。あと残りひとつの x は何でもいいのですが、一番計算がラクそうな $x=0$ を代入します。

$x=-1$ のとき

$$(-1)^2+5=A(-1-2)$$
$$6=-3A$$
$$A=-2$$

$x=2$ のとき

$$2^2+5=C(2+1)^2$$
$$9C=9$$
$$C=1$$

$x=0$ のとき

$$0^2+5=-2(0-2)+B(0+1)(0-2)+(0+1)^2$$
$$5=4-2B+1$$
$$B=0$$

また、$A=-2, B=0, C=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2\\
=&-2(x-2)+0\cdot(x+1)(x-2)+1\cdot(x+1)^2\\
=&x^2+5
\end{aligned}
$$

となるので、① は x の恒等式である。

以上より、$\boldsymbol{A=-2, B=0, C=1}$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}\,dx\\
=&\int_0^1 \left\{\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-2}\right\}dx\\
=&\left[2(x+1)^{-1}+\log|x-2|\right]_0^1\\
=&2\cdot\frac{1}{2}+\log|1-2|-\{2\cdot(0+1)^2+\log|0-2|\}\\
=&\boldsymbol{-1-\log 2}
\end{aligned}
$$