
「面倒だな」と思った時の対処法

こんにちは、河見賢司です。今日は、少し変わったテーマです。それは、「面倒だな」と思った時の対処法です。

数学の問題を解いていて、「面倒だな」と感じることありませんか？「確かにこの解法だったら、解けないことないけど、この方法だとめっちゃ面倒くさい…」

少し適当な表現で悪いのですが、次のことを覚えておいてください。

数学の考え方

数学の問題で、単に面倒なだけの問題が出題されることは少ない。「面倒だな」と思えるときは、他のもっと楽な解法が存在することがほとんど

日本語だけでは、伝わりにくいので実際に３問ほど、この考えが必要な問題を解いていきます。

１問目は数学 I の因数分解、２問目は数学 II の不等式の証明、３問目は数学 B の数列のシグマに関する問題です。

問題 1

$(a+2b)^2-3a-6b-10$ を因数分解せよ

【解説】

この問題を「解いてください」というと、多くの人が $(a+2b)^2$ を展開して … と解いていきます。

まあ、確かに展開をしたくなる気持ちは分かるけど、いきなり展開をするんじゃなくて、本当に展開するのかな？と展開をする前にほんのちょっとでもいいから考えられるようにして欲しいです。

$(a+2b)^2$ の展開なんて誰でもできるよね？誰でもできるような問題出題すると思う？もし、展開するのだったら $(a+2b)^2$ を展開した式で出題するはずだよね？こんな中途半端な状態で出題するわけがない …

そういったことから、この問題は「展開する以外の解き方があるのかな?」と考えるようなってください。で、ここから「展開する以外の方法があるのかな？」なんて頭に入れながら、もう一度問題の $(a+2b)^2-3a-6b-10$ を見てみると … 勘のいい人ならすぐに気づくと思うけど、$(a+2b)^2$ を展開しないで使うとすると、$(a+2b)$ が共通な部分になるくらいしか方法がないよね？

そういったことを頭に入れて、$(a+2b)^2-3a-6b-10$ を見てみると、次のように式変形できるっていうのに気づくんじゃない？$(a+2b)^2-3a-6b-10=(a+2b)^2-3(a+2b)-10$ となります。これだったら、$a+2b$ のみの式になったから考えやすいよね。

「言われたら分かるけど、こんなのなかなか思いつかないよ」と思う人もいると思います。確かにそうです。これには、「慣れてください」としか言いようがないんですけど、気づきにくいだろうというときは、出題者がヒントを出してくれていることがあります。

今回の $(a+2b)^2-3a-6b-10$ は $(a+2b)^2$ がヒントです。「何かおかしいな」と感じた時は、それがヒントになっていることが多いです。あとは、問題を解くときに常にこういうことを意識したら自然と気づけるようになると思います。それでは、解答にすすみま

す。

【解答】

$(a+2b)^2-3a-6b-10$

$=(a+2b)^2-3(a+2b)-10$ ◀ $a+2b$ のみの式になった

$A=a+2b$ とする

$=A^2-3A-10$

$=(A+2)(A-5)$

$=\boldsymbol{(a+2b+2)(a+2b-5)}$

今回は、見やすいように $a+2b=A$ と置き換えましたが、このくらいなら普通は置き換えないと思います。置き換えないと分かりにくいという人もいますが、置き換えなしでも解けるようになっておいてください。

それでは、次の問題に進みます。次は、数学 II の不等式の証明に関する問題です。

問題 2

$x+y+z=3$, $(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$ のとき、$(x-1)(y-1)(z-1)=0$ であることを示せ

【解説】

この問題もどうしようかな？と考えます。

与えられた条件を使って解いていくのが基本だけど、$x+y+z=3$ はいいとして、$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3$ はどうも使いにくい … これを使えって言っても展開をするくらいしか思いつかないけど、展開するのは面倒だからあまりしたくない …

そこで、今回のテーマに戻るけど「面倒だなと思えるときは別の解法がある」んだよね。じゃあ、展開する以外の解法はなんかないかな？と思ったら、$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3$ っ

て対称式じゃない？気づきにくいという人は $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ とでも置き換えてみたら気づけると思います。$X^3+Y^3+Z^3$ ってなるよね。じゃあ、対称式の知識を使って式変形できるんじゃないかな？ということで、対称式の式変形をしてみることにします。

(注) こういうふうに説明をすると、「対称式を使って、問題が解けるという根拠はどこにあるのですか？根拠もないのに対称式を使った式変形するのですか？」と質問されることがあります。

その質問に答えると「根拠はありません」。

以前にも何度か話しましたが、数学って解く前からうまくいくかどうかよくわからないってことがほとんどなんです。

とりあえず、うまくいく可能性のある解法を思いついたらその解き方でといてみます。それで解けたらＯＫですし、解けなかったらまた別の解法を考えます。

今回も対称式を使ったからといって解けるかどうかは分かりません。ですが、とりあえず $X^3+Y^3+Z^3$ となっているので対称式の式変形はできそうです。

ですから、うまくいくかどうかは分かりませんが、とりあえず対称式の式変形をしてみることにしました。
⇑まわりくどい説明で、ごめんなさい。でも、こういった考えをしっかりと理解出来ている人が本当に少ないので、あえて長々と説明させてもらいました。

では、$X^3+y^3+Z^3$ を対称式の式変形をしていきたいと思います。対称式を理解できていない人は対称式 http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf のページに詳しく説明しています。

$X^3+Y^3+Z^3=(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)+3XYZ$ とりあえず、対称式の式変形をしてみるとこうなります。

ここで、左側の $X+Y+Z$ に着目します。$X=x-1, Y=y-1, Z=z-1$ を $X+Y+Z$ に代入してみると、$X+Y+Z=(x-1)+(y-1)+(z-1)=x+y+z-3$ となります。

さらに $x+y+z=3$ っていう条件より、$X+Y+Z=x+y+z-3=3-3=0$ ってなるよね。

$(X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$ は $X+Y+Z=0$ なので、0 かけるなんとかの形になります。右側の $(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$ の値がいくらになるか求めなくても 0 をかけたら 0 になります。だから $X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$ ってなるよね。

ここまで来たらもうほとんど証明終了です。$X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$ を元の x, y, z の式に戻すと $(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=3(x-1)(y-1)(z-1)$ となります。

ところで、問題文の条件より $(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$ なので $3(x-1)(y-1)(z-1)=0$ となります。これで証明終了です。

気づければなんてことない問題ですが、こういうふうに解くということを気づけない人が本当に多いです。

しっかりと考えられるようになっておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ とする。

$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$

$\Leftrightarrow X^3+Y^3+Z^3=0$

$\Leftrightarrow (X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)+3XYZ=0$

ここで $X+Y+Z=(x-1)+(y-1)+(z-1)=x+y+z-3=0$ $(\because x+y+z=3)$ を考え

$\Leftrightarrow 3XYZ=0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(y-1)(z-1)=0$

以上より、$(x-1)(y-1)(z-1)=0$ が成立する。（証明終）

では、最後に数学Ｂの数列のシグマの問題です。

これは以前にも紹介したことのある問題なんですが、今日のところでちょうどいい問題だったのでもう一度紹介することにします。

なお、シグマを苦手としている人が多いです。確かに、記号の意味が分かりにくく最初のうちは大変かもしれませんが、慣れてくるとワンパターンで解けてしまうので簡単です。

シグマの計算に自信がないという人は、次のページで勉強して下さい。

シグマの計算①「公式を使ったシグマの計算」http://www.hmg-gen.com/siguma1.pdf
シグマの計算②「互いに打ち消し合うタイプのシグマの計算」http://www.hmg-gen.com/siguma2.pdf
シグマの計算③「(等差)×(等比) 型のシグマの計算」http://www.hmg-gen.com/siguma3.pdf

それでは、次の問題を解いてください。

問題３

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$

(1)
【解説】
この問題なんだけど、$(k-1)^3$ を展開して解いていきたいけど、シグマの計算って面倒だったからあまりしたくない …

そこで、どうしようかな？と思うけど、実際にシグマの中身を書き出してみます。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$
$= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$ ◀ シグマの中身を実際に書き出した
$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$ ◀ 0^3 を消した。
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

ここまできたら、公式を適用するだけだよね。少し話はそれますが、シグマは受験でもよく出てきます。公式や部分分数などきまりきった形で解けるときはそれでＯＫなのですが、解き方がよく分からないというときはとりあえず、シグマの中身を実際に書き出してから考える、ということが鉄則です。よく使う考えなので、覚えておいてください。

【解答】

$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)^3$

$=0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3$ ◀ シグマの中身を実際に書き出した

$=\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ ◀ シグマの公式より

$=\boldsymbol{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

(2)

【解説】

これも (1) と同じように、シグマの中身を実際に書き出してから解いていきます。

【解答】

$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$

$=2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$ ◀ シグマを実際に書き出した

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3-1^3$ ◀ 強引に公式が使える形に変形をした

$=\sum_{k=1}^{n+1}k^3-1$

$=\left(\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}\right)^2-1$ ◀ $n+1$ であることに注意してシグマの公式を適用した

$=\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)^2-1$

$=\left(\frac{n^2+3n+2}{2}+1\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{2}-1\right)$ ◀ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使った

$=\frac{n^2+3n+4}{2}\cdot\frac{n(n+3)}{2}$

$=\boldsymbol{\frac{n(n+3)(n^2+3n+4)}{4}}$

これで、今回のプリントは終了です。

今回は３問紹介しましたが、３問を紹介した意味は特にありません。パッと思いついた

のがこの３問だったので、今回はこの３問を紹介しただけです。

というのも、この「面倒だったら、他の解法を考える」というのはいたるところで必要になる考えです。

数学のできる人は無意識的にこういうことを考えながら解いています。学校の先生や予備校の先生など、教える立場にある人はもとから数学ができるので、こういったことは当たり前に感じています。

だから、あまりこういった事柄を説明してくれないんです。

数学は確かに能力が必要ですが、今日話したようなことを丁寧にひとつずつ理解していけば数学のできる人と同じように考えられるようになります。むしろ、論理的に考えることができるようになるので元から数学ができて、勘に任せて解いている人より成績が良くなるということもよくある話です。

最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、繰り返し今日話したことを考えながら問題を解いているとできるようになってきます。大変かもしれませんが、がんばってください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司