

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

「2次関数とx軸との位置関係」

こんにちは、河見賢司です。今回は、「2次関数のグラフ（放物線）とx軸との位置関係」の話をしたと思います。

「2次関数のグラフ（放物線）とx軸との位置関係」って、どんなんだろう？と思った人もいると思いますが、最終的には次のような問題を解けることを目的とします。

問題

すべての x に対して、 $ax^2 - x + a > 0$ が成立するような a の値の範囲を求めよ

本当に基礎的な問題かもしれないんですけど、こういった問題を理解できていない人が多いです。という僕も、高校1年生のときは理解できていなかったと思います。

この問題を解くには、判別式が必要です。判別式についてまず説明をしたいと思います。まず、判別式については次の事柄を覚えてください。

判別式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とする。ただし $D = b^2 - 4ac$

- (i) $D > 0$ のとき、2次方程式は異なる2つの実数解をもつ
- (ii) $D = 0$ のとき、2次方程式は1つの実数解(重解)をもつ
- (iii) $D < 0$ のとき、2次方程式は実数解をもたない

判別式については、こちらのページでも紹介しているので勉強をしたいという人はこちら

らのページも見てください。 <http://www.hmg-gen.com/kaitou1-10.pdf>

前回は式で説明をしましたが、今回はグラフで説明をしたいと思います。

$D > 0$ のとき、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる2つの実数解をもちます。ということは、 $y = ax^2 + bx + c$ と $y = 0$ のふたつのグラフが2点で交わります。

↑これが理解できないという人は、次のことを思い出したらいいと思います。例えば $y = x^2 + 2x - 3$ と $y = 0$ の交点を求めなさいと言えば、 y を消去して $x^2 + 2x - 3 = 0$ っつするよね？

これを逆に元に戻したら、 $x^2 + 2x - 3 = 0$ は $y = x^2 + 2x - 3$ と $y = 0$ との交点を求めるってことになるよね。

ちょっと適当な説明だけどこれで理解できると思います。

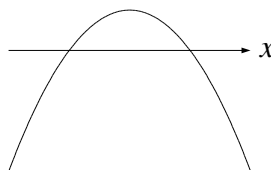
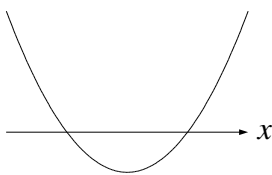
2次関数のグラフは下に凸なときと、上に凸なときの2通りの形があります。下に凸か、上に凸かは2次関数の x^2 の係数の正負によってきまります。正のときは下に凸な2次関数、負のときは上に凸な2次関数となります。

今回は、 $y = ax^2 + bx + c$ とおいたので、 x^2 の係数は a です。よって、 $a > 0$ のときは、下に凸な2次関数のグラフ、 $a < 0$ のときは、上に凸な2次関数のグラフとなります。

以上を踏まえて、 $D > 0$ を図示すると、次のようになります。

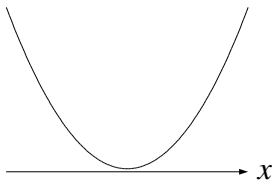
(i) $a > 0$ のとき

(ii) $a < 0$ のとき

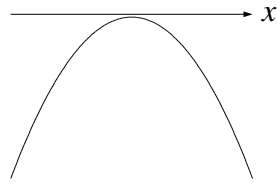


次に、 $D = 0$ のときを、考えます。 $D = 0$ とは、2次関数のグラフと x 軸とが接するときです。これも、 $a > 0$ か $a < 0$ で2通りの場合が考えられます。

(i) $a > 0$ のとき

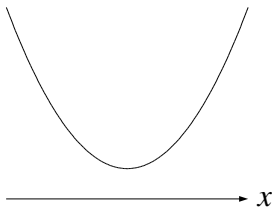


(ii) $a < 0$ のとき

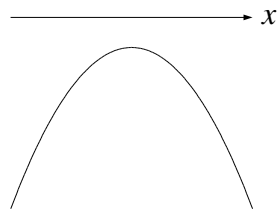


最後に $D < 0$ のときです。 $D < 0$ は 2 次関数のグラフと x 軸との交点がないときだから、

(i) $a > 0$ のとき



(ii) $a < 0$ のとき

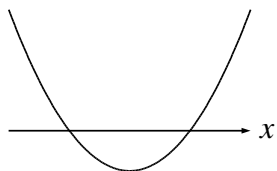


以上より、これまでの事柄をまとめると 2 次関数のグラフ（放物線）と x 軸との位置関係は次の 6 通りになります。

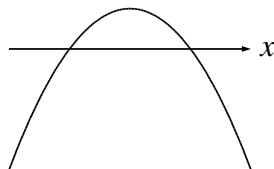
2次関数のグラフ（放物線）と x 軸との位置関係

(I) $D > 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき

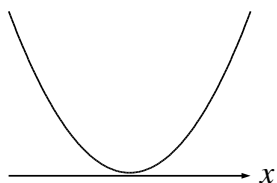


(ii) $a < 0$ のとき

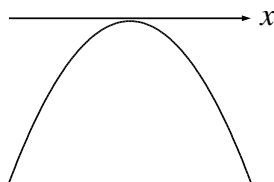


(II) $D = 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき

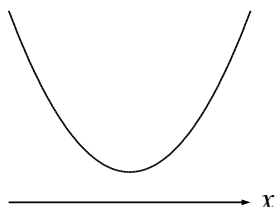


(ii) $a < 0$ のとき

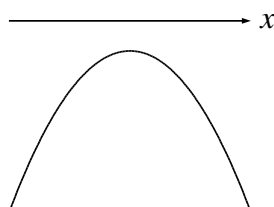


(III) $D < 0$ のとき

(i) $a > 0$ のとき



(ii) $a < 0$ のとき



このことを踏まえて、最初に載せていた問題を実際に解いてみたいと思います。

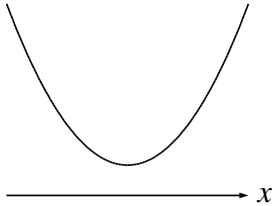
問題

すべての x に対して、 $ax^2 - x + a > 0$ が成立するような a の値の範囲を求めよ

【解答】

この問題は少し難しく感じるかもしれませんが、これまで解説してきた内容さえ理解できていれば簡単だと思います。

$ax^2 - x + a > 0$ とは、 $y = ax^2 + x + a$ が $y = 0$ より常に上側にあるということです。先ほど6パターンに分けましたが、 x の値にかかわらずすべて上側になるのは次のパターンです。



上記のようになるのは $a > 0$ かつ $D < 0$ のときです。これだけで、問題を解くことができます。理解できていない人が多いですが理解さえできたら簡単です。しっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$ax^2 - x + a = 0$ の判別式を D とする。

↑たまたま「 $ax^2 - x + a > 0$ の判別式を D とすると」と書いたり、この問題ではないけど「 $y = ax^2 + bx + c$ の判別式を D とすると」、なんて書いている人がいるけどこれはダメです。

判別式は2次方程式の実数解の個数を判別するものなので、2次方程式($ax^2 + bx + c = 0$ の形をしたもの)以外は、判別式はないですよ

すべての x に対して、 $ax^2 - x + a > 0$ が成立するとき、 $a > 0$ かつ $D < 0$ となる。

$$D = (-1)^2 - 4a \cdot a < 0$$

$$4a^2 - 1 > 0$$

$$(2a + 1)(2a - 1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < a$$

↑2次不等式の解き方が分からないという人は、<http://www.hmg-gen.com/tecni1a-6.pdf>を見てください

よって、求める a の値の範囲は $a > 0$ かつ $a < -\frac{1}{2} \frac{1}{2} < a$ なので、

$a > \frac{1}{2}$ となる。◀ **これが答え**

こういった「 x 軸と放物線の位置関係に関する問題」は理解できたでしょうか？それでは、こういったタイプの問題をもう一問、解いてもらいます。

問題

放物線 $y = (a - 1)x^2 + (a + 1)x + a$ と直線 $y = x + 1$ がある。放物線が直線よりつねに下側にあるような a の値の範囲を求めよ。

【解説】

「放物線と直線の位置関係なんて分からないよ」と言う人がいますが、放物線と直線そのまま考えることはないですよ。

放物線が直線の常に下側と言うことは、すべての x において次の不等式が成立するば OK です。

$$(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$$

$$(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a - x - 1 < 0 \quad \text{◀ 右辺の } x + 1 \text{ を左辺に移項した}$$

$$(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$$

$(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ を式変形をしたら、 $(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ になりました。少し難しい言い方をすれば、同値変形していった結果 $(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ が $(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ になったので、 $(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ と $(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ は同値、まったく同じと言うことです。

問題は、「常に $(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ を満たす a の値の範囲を求めよ」でしたが $(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ と $(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ は同値なので、「常に $(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$ を満たす a の値の範囲を求めよ」となります。

これなら、2次関数のグラフと x 軸との位置関係なので、さっきと同じように考えることができるよね？

少し長々と説明しました。くどいと感じた人もいるかもしれませんが、理解できていない人も多いので少々長めに説明しました。それでは、解答に進みます。

【解答】

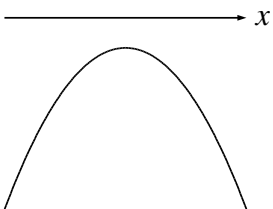
放物線 $y = (a - 1)x^2 + (a + 1)x + a$ と直線 $y = x + 1$ がある。放物線が直線よりつねに下側にあるとき、全ての x で $(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$ が成立する。

$$(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a < x + 1$$

$$(a - 1)x^2 + (a + 1)x + a - x - 1 < 0 \quad \blacktriangleleft \text{右辺の } x + 1 \text{ を左辺に移項した}$$

$$(a - 1)x^2 + ax + a - 1 < 0$$

上記が任意の x について成立するとき、 $y = (a - 1)x^2 + ax + a - 1$ のグラフが下記のように、 x 軸と共有点をもたない。



$(a - 1)x^2 + ax + a - 1 = 0$ の判別式を D とすると、 $a - 1 < 0$ かつ $D < 0$ である。

↑ 上に凸で、 x 軸との交点なし。つまり解なしとなるのは $D < 0$ のとき

$$D = a^2 - 4(a-1) \cdot (a-1) < 0$$

$$a^2 - 4(a^2 - 2a + 1) < 0$$

$$a^2 - 4a^2 + 8a - 4 < 0$$

$$-3a^2 + 8a - 4 < 0$$

$$3a^2 - 8a + 4 > 0$$

$$(a-2)(3a-2) > 0$$

$$a < \frac{2}{3} \quad 2 < a$$

$a-1 < 0$ を考え、求める範囲は $a < \frac{2}{3}$ となる。◀ **これが答え**

今回の問題は、これで終了です。最初にも言いましたが意外に理解できていない人が多いです。あなたもそうだったかもしれませんが、このタイプの問題は本当に重要です。慣れてくると、簡単なのでしっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司