

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

「絶対値を含む不等式の計算」

こんにちは、河見賢司です。今回は、絶対値を含む不等式の計算をグラフで考えるという手法を解説したいと思います。

不等式をグラフで考えるという手法を知らない人は、<http://www.hmg-gen.com/tecnila-6.pdf> を見てください。2次不等式をグラフを使って解いています。このプリントを見れば、不等式をグラフで考えるという手法が分かると思います。

いきなりですが、次の問題を解いてください。

$ 2x + x - 3 < 4$ を解け

【解説】

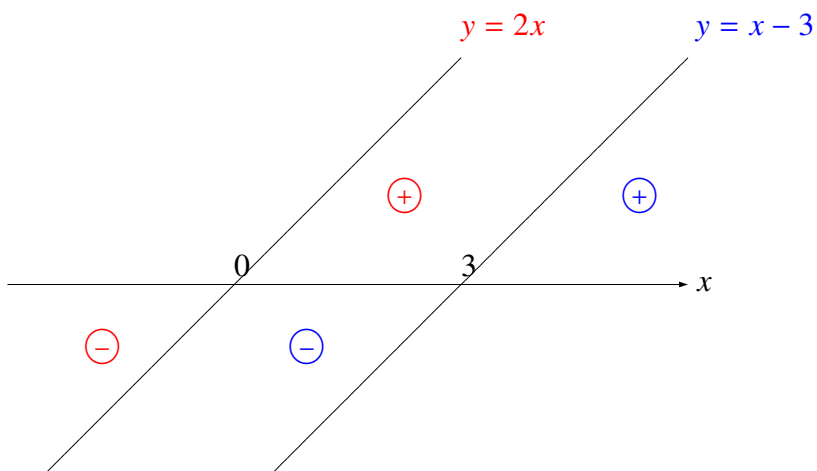
上記の問題では絶対値を外す必要があります。絶対値の外し方は慣れてきたら頭の中でできるようになってきます。

ただ、最初のうちは間違えやすいので以下のように表を書いたり、グラフを描いて解いてもらえばいいですよ。まずは、表を使った書き方を紹介します。

x		0		3	
$2x$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+

↑今回、絶対値の中身は $2x$ と $x-3$ の2つです。それぞれの絶対値の変わり目。つまり値が0になるのは $x=0,3$ のときです。上記より、 $x < 0$ のとき $2x < 0, x-3 < 0$ 、 $0 < x < 3$ のとき $2x > 0, x-3 < 0$ 、 $3 < x$ のとき $2x > 0, x-3 > 0$ であることが分かります。

次にグラフを使って符号を考えていく方法です。



(注) ↑本来なら $y = 2x$ と $y = x$ とは傾きが違うので、上記のようにはならないが、絶対値は正負さえわかればよい(つまり x 軸より上にあるかどうか)なので、傾きは正負に影響しないので適当にかきました。

上記のグラフを見れば、絶対値の正負は一目瞭然です。

$x \leq 0$ のとき、 $2x \leq 0, x-3 \leq 0$
 $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $2x \geq 0, x-3 \leq 0$
 $3 \leq x$ のとき、 $2x \geq 0, x-3 \geq 0$ となります。

「このくらいなら、頭の中でもできるよ」と思う人もいると思います。確かにそうです。

ですが、正負を判断するのはこういうふうにグラフをかくのが視覚的に分かるので間違いにくいということを覚えておいてください。

では、問題に戻ります。問題を解いてくださいというと、次のように解くことが多いです。

【解答】

(i) $x \leq 0$ のとき、 $2x \geq 0$, $x - 3 \leq 0$ となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$-2x - (x - 3) < 4$$

$$-3x < 1$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$x \leq 0$ と $x > -\frac{1}{3}$ をあわせて $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ となる

(ii) $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $2x \geq 0$, $x - 3 \leq 0$ となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$2x - (x - 3) < 4$$

$$x < 1$$

$0 \leq x \leq 3$ と $x < 1$ をあわせて $0 \leq x < 1$ となる。

(iii) $3 \leq x$ のとき、 $2x \geq 0$, $x - 3 \geq 0$ となるので

$$|2x| + |x - 3| < 4$$

$$2x + x - 3 < 4$$

$$3x < 7$$

$$x < \frac{7}{3}$$

$x \geq 3$ より $x < \frac{7}{3}$ となることはないので、この場合解はない。

以上より、 $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ または $0 \leq x < 1$ なので、これをあわせて $-\frac{1}{3} < x < 1$ となる。

もちろん上記の解き方でもいいんですけど、グラフを使ったほうがよりはやく解くことができます。数式で解くと計算間違いに気が付きにくいですが、グラフを使って解くと計算間違いに気が付きやすいと思います。

今回のように、絶対値が2つ以上含まれる不等式はグラフで考えた方がいいです。

【解説】

$|2x| + |x - 3| < 4$ とは、 $y = |2x| + |x - 3|$ のグラフと $y = 4$ のグラフをかき、 $y = |2x| + |x - 3|$ のグラフの方が $y = 4$ のグラフより下側にあるような x の値の範囲を求めなさいよ、ということです。

で、 $y = |2x| + |x - 3|$ なんですが、まじめにかいてもいいのですが、次のように考えるのがはやいです。

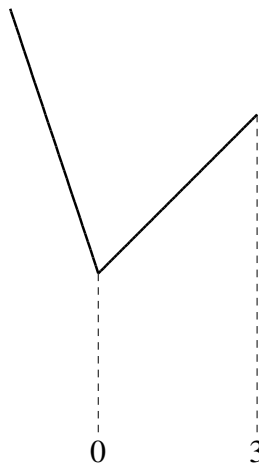
$y = |2x| + |x - 3|$ は絶対値を外すと1次関数です。1次関数は傾きさえ分かれば、グラフの概形はわかります。

まず、 $x \leq 0$ のとき、両方ともマイナスなので x の係数は -3 となります。 x の係数は傾きを表すので、 $x \leq 0$ では傾きが -3 の1次関数となります。

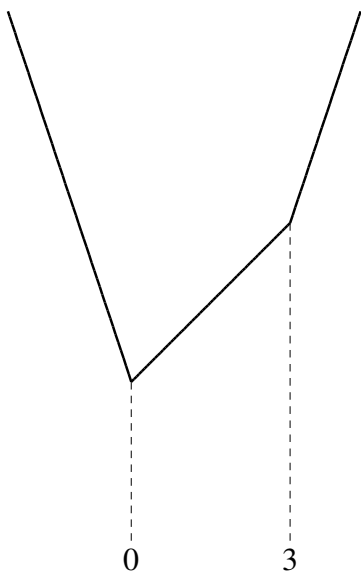


↑ $x \leq 0$ で傾き -3 の直線をかいた

これと同じように次は、 $0 \leq x \leq 3$ のときです。このとき $2x \geq 0$, $x - 3 \leq 0$ なので、 x の係数だけに注目すると、 1 になります。これが直線の傾きになります。また、絶対値のグラフはつながっていることを考えて、さきほどのグラフにかき加えます。

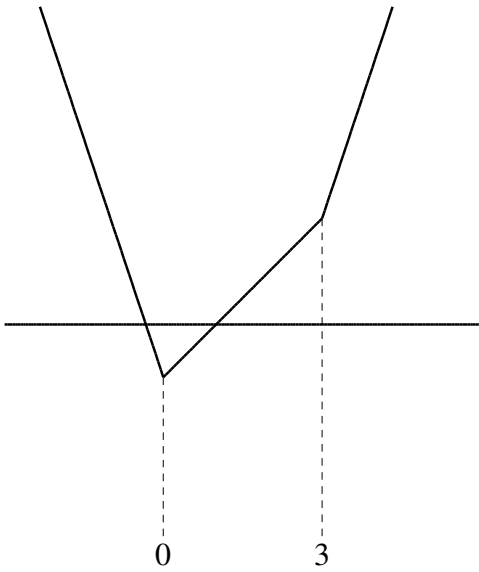


最後に、 $3 \leq x$ のときです。このとき $2x \geq 0, x-3 \geq 0$ なので、先ほどと同じように x の係数に着目すると、 x の係数は3になります。これが傾きなので、このことを考えてグラフをかくと



絶対値のグラフは上記のようになります。

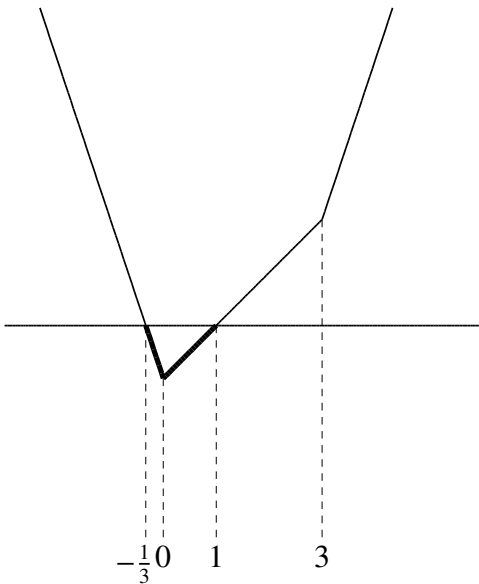
後は、絶対値のグラフと $y = 4$ のグラフの上下関係を知りたいのですが、 $x = 0$ のときの $y = |2x| + |x-3|$ の y の値を求めると $y = 3$ となり、 $x = 3$ のときの y の値を求めると $y = 6$ となることから $y = 4$ のグラフは次のような位置にあります。



後は、このグラフを使って問題を解いていくだけです。それでは、解答に進みます。

【解説】

$y = |2x| + |x - 4|$ と $y = 4$ のグラフをかくと以下の通り、



グラフより、 $-\frac{1}{3} < x < 1$ となる。◀ **これが答え**

*上記の交点は、最初の解答と同じようにして計算しています。

今回ははじめてなのでグラフをかくのに時間がかかりましたが、慣れてくるとこんなのは一瞬でかくことができるようになります。

今回の問題では、 $3 \leq x$ では解なしですが、これはグラフを考えずに数式で解く手法では解くしかありません。解いたうえで、解なしということに気づきます。ところが、グラフで考える手法だと、解く前からグラフから解なしということが分かります。

簡単な問題だと別にいいのですが、難しい問題になるとグラフで考えるといった手法が必要になってきます。グラフは、視覚的に判断できるので数式では分かりにくい問題もすぐに理解できることがあります。

現段階ではそれほどグラフで考える必要性を感じないという人も、今後必要になってきます。ぜひとも、このグラフで考えると言う手法をしっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司