

こんにちは、河見賢司です。

今回は三角形の面積の求め方でヘロンの公式を紹介します。

ヘロンの公式とは三角形の3辺の長さが与えられているときに三角形の面積を求める公式です。まずは、ヘロンの公式を覚えてください。

#### ヘロンの公式

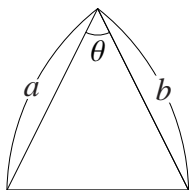
3辺の長さが  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  である  $\triangle ABC$  で  $s = \frac{a+b+c}{2}$  とする。

このとき  $\triangle ABC$  の面積  $S$  は  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  である。

(ヘロンの公式の証明は問題の後ろに書いてあります。少し難しいですが、考え方をかなり詳しく書いたのでぜひとも解いて欲しいです)

このヘロンの公式がなぜ便利かというと、三角形の面積は下にまとめたように  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  で与えられています。

#### 三角形の面積の公式



左図のようなとき、三角形の面積  $S$  は、  
 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  となる。

上記のように三角形の面積を求めるには  $\sin \theta$  の値が必要です。

ですから3辺の長さが与えられているとき上記の公式で三角形の面積を求めようとすると、次のステップを踏む必要があります

- ① 余弦定理を使って  $\cos \theta$  の値を求める
- ② 求まった  $\cos \theta$  から  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  の公式を使い  $\sin \theta$  の値を求める。
- ③ 三角形の面積の公式  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  より面積を求める

文字だけ見るとそれほど大変そうじゃないけど、これが結構面倒なんです。そんな時に役に立つのがヘロンの公式です。ヘロンの公式を使うと簡単に面積を求めることができます。

ヘロンの公式なんですが、3角形のすべての辺の長さが与えられているときはいつでも使えるのですが、辺の長さが整数以外のときは計算が面倒になることが多いです（問題によっては、ヘロンの公式でも簡単に解ける場合もありますが）。ですから、ヘロンの公式は、三角形の面積を求めるときで全ての辺の長さが整数で与えられているときに適用するというのを覚えておいてください。

では、次の問題を解いてみてください。ヘロンの公式を使う解き方と  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  の2通りの解法で解いてみます。ヘロンの公式の方がいかに簡単か分かりますよ。

問題

$BC = 5, CA = 6, AB = 7$  の三角形  $ABC$  の面積を求めよ。

【解答1（ヘロンの公式）】

$$s = \frac{5+6+7}{2}$$

$$= 9$$

ヘロンの公式より

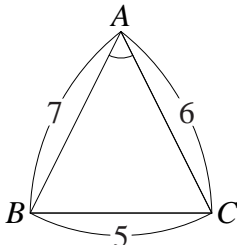
$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} \leftarrow \text{ヘロンの公式 } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ より}$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$= 6\sqrt{6} \leftarrow \text{これが答え}$$

ヘロンの公式を使うと本当に簡単に解けたと思います。次は、 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  で解く解法で解いていきます。

【解答2】



↑ 図形の縮尺が少しおかしいですが、高校数学では図形は丁寧に書くより大雑把に書いた方がいいですよ。大雑把な図形でことたりることがほとんどです。問題を解いてみて、どうしてもキレイな図が必要なときは書きなおすようにしてください。

丁寧な図形をかくには時間がかかるので縮尺は無視しても解ければいい、そんな感じで

す。

余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \frac{60}{2 \cdot 7 \cdot 6} \quad \leftarrow \text{約分を考え分母の } 2 \cdot 7 \cdot 6 \text{ は計算しない} \\ &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

ここで、 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  に  $\cos A = \frac{5}{7}$  を代入すると

$$\sin^2 A + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{25}{49}$$

$$\sin^2 A = \frac{24}{49}$$

$$\sin A = \pm \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$  を考え  $\sin A > 0$  より

$$\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

三角形  $ABC$  の面積を  $S$  とする。

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad \leftarrow S = \frac{1}{2}bc \sin A \text{ より} \\ &= 6\sqrt{6} \quad \leftarrow \text{これが答え}\end{aligned}$$

とりあえずヘロンの公式を使う解法とそうでないいわゆる三角形の面積の公式を使った解法で解いてみました。

解いてみたら分かると思いますが、ヘロンの公式を使う解法の方が本当にラクです。センター試験などでたまにヘロンの公式を適用できるときもありますが、知っているのとそうでないのでは時間がまったく違ってきますよね。意外に知らない人もいますので、もし知らなかった人はしっかりと覚えておいてください。

ヘロンの公式なのですが、なぜこの公式が成立するか知りたい人も多いと思うので一応証明しておきます。

ヘロンの公式は  $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$  から導くことができます。導くことはできますが、少し面倒です。

一般的に公式の証明というのは計算が煩雑になることが多いです。本来なら、すべての高校生が証明できることがベストなんですが、現実には証明できなくても公式を適用するだけで問題が解けてしまうことがほとんどです。

ですから、今回の証明も数学があまり得意でないという人は見なくていいです。ただ、この証明法で数学の考え方？というものが必要になってきます。なぜそのように解いたか考え方を添えていますので、できたら読むようにしてください。青文字は考え方です。考え方を理解してもらうために、少しひつこいくらい書いています。それでは、証明に進みます。

#### 【ヘロンの公式の証明】

$S = \frac{1}{2}bc \sin A$  からヘロンの公式を導くんだけど、ヘロンの公式は辺のみの式だから、とりあえず  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  から角を含んだ式  $\sin A$  辺のみの式にしないといけない

$\sin A$  は無理だけど、 $\cos A$  だったら辺のみの式にできるから  $\sin A$  を  $\cos A$  で表すことにしよう。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2}bc \sqrt{\sin^2 A} \\ &= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 A} \end{aligned}$$

これでとりあえず  $\cos A$  に変形できた、あとはこの式を辺のみの式にしないといけないので余弦定理を使って  $\cos A$  を辺のみの式であらわそう！

$$\text{余弦定理より、} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \end{aligned}$$

とりあえず辺のみの式にしたけど、ここからどうしようかな？上記の式がヘロンの公式

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  の形に式変形できないといけない

ということはルートの前には何も無いから、よく分かんないけどとりあえずルートの外にある  $\frac{1}{2}bc$  をルートの中に入れてみようかな？

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\right)^2 - \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\right)^2 - \left(\frac{1}{2}bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

ここでルートの中身を展開したくなるけど、 $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)^2$  なんて展開したら面倒だな？

どうしようかな？ とりあえずヘロンの公式はルートの中身が積の形になっているんだから因数分解をしたいな。ルートの中身は  $\left(\frac{1}{2}bc\right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)^2$  と  $(\quad)^2 - (\quad)^2$  と2乗引く2乗の形になっているから、 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  の公式で因数分解ができるな

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}bc\right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{bc}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right) \left(\frac{bc}{2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)} \quad \blacktriangleleft \text{因数分解をした} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2bc}{4} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right) \left(\frac{2bc}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}\right)} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした} \\ &= \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{4} \cdot \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}} \end{aligned}$$

とりあえずここまで来たけどヘロンの公式はすべて積の形で表されている。また  $(\quad)^2 - (\quad)^2$  の形で表されたからここでも因数分解をしよう

$$S = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}{4} \cdot \frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{4}}$$

で、ここまできたら次のことに気づかないといけません。

~~$a + b + c = (\text{一定})$~~

$a + b + c = (\text{一定})$  のとき、  
 $a + b = (\text{一定}) - c$ ,  $b + c = (\text{一定}) - a$ ,  $c + a = (\text{一定}) - b$  を使って変数を減らす。

今回の問題では、 $s = \frac{a+b+c}{2}$  つまり  $a+b+c = 2s$  という条件があるんだよね。ということは  $a+b+c = (\text{一定})$  なんだから、 $a+b = 2s - c$ ,  $b+c = 2s - a$ ,  $c+a = 2s - b$  をそれぞれ代入するんだなと気づけるようにしておいてください。それでは、問題に戻ります。

$$S = \sqrt{\frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}{4} \cdot \frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4} \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)\{(b+c)-a\}}{4} \cdot \frac{\{(a+b)-c\}\{(a+c)-b\}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2s\{(2s-a)-a\}}{4} \cdot \frac{\{(2s-c)-c\}\{(2s-b)-b\}}{4}}$$

↑  $a + b + c = 2s$ ,  $a + b = 2s - c$ ,  $b + c = 2s - a$ ,  $c + a = 2s - b$  をそれぞれ代入

$$= \sqrt{\frac{2s(2s-2a)}{4} \cdot \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s-a)}{4} \cdot \frac{2(s-c) \cdot 2(s-b)}{4}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \leftarrow \text{ヘロンの公式が導けた}$$

このように今回の証明はとても難しかったと思います。 $a + b + c = (\text{一定})$  の文字消去や  $( )^2 - ( )^2$  は無闇に展開しないなど、数学を解く上では常に「なぜ、その式変形をするのか？」と自問しながら解く癖をつけておいてください。

そうすると、同じ問題を解いたにしても理解力がまったく違ってきますよ。今回はこれで終了です。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)