

「対称式を含んだ2変数関数の最大値、最小値の問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は「対称式を含んだ2変数関数の最大値、最小値の問題」を解説します。

「対称式を含んだ2変数関数の最大値、最小値の問題」と言ってもどんな問題か分からないと思います。次のような問題です。

問題

x, y を実数とする、 $x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき $xy + 2(x + y)$ の最大値と最小値を求めよ。

上記のような問題です。この類の問題は、難しくはないんですけど知らないという人が多いです。という僕も高校生のときは知りませんでした。でも、大学受験には頻出で、パッと思いつく範囲で、2005年の東工大で出題されています。

簡単な大学では出題される可能性は低いですが、ある程度以上のレベルの大学ではよく出題され、また有名問題なので合格する人はまず満点をとっていると思います。

有名なんですけど、なぜか学校では勉強をしないということが多いです。簡単な問題ですのでしっかりと理解しておくようにしてください。

この問題はどうやって解いていくかというと、 $x^2 + xy + y^2 = 1$ も $xy + 2(x + y)$ も対称式なので $x + y = u$, $xy = v$ とでも置き換えて解いていきます。

$x + y = u$, $xy = v$ と置き換えると $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = u^2 - v = 1$ となります。さらに $xy + 2(x + y) = v + 2u$ となるので、 $u^2 - 2v = 1$ のとき $v + 2u$ の最大値と最小値を求めたらいいのかな？と思います。

確かにこういうふうに解いていくのですが、少し忘れてはいけないことがあります。それは文字消去するときの注意点です。

文字を消去するときは必ず範囲について考えないといけません。このあたりのことが分からない人は

<http://www.hmg-gen.com/h-mojisyoukyo.pdf>

上記のページで、文字消去するときの注意点を勉強して下さい。

今回の問題では x, y を消去して u, v のみの式にしてから考えていきます。文字消去するときは、範囲に注意するという考えに従うと、 x, y を消去するときは当然 u, v がどのよ

うな範囲をとりうるか考える必要があります。

x, y が実数全体を動くときの u, v の値の範囲がどうなるか考えないとダメなんだけど、 u, v の値の範囲の求め方わかるかな？

解と係数の関係を使うと x, y を 2 解とするような 2 次方程式は $X^2 - uX + v = 0$ だよな？

x, y は実数なんだから、実数 x, y が存在するための条件はこの方程式が実数解をもつ条件と同じ (x, y はこの方程式の解。 x, y は実数なんだから、当然方程式は実数解をもたないといけない)、この方程式の判別式を D とすると、実数 x, y が存在するには $D \geq 0$ のときとなります。

(注) たまに x, y 2 つの実数が存在するのだから $D > 0$ じゃないか？ と質問をする人がいますが、今回は $x \neq y$ という条件が与えられていないので $x = y$ のときも OK です。つまり $D = 0$ のときも大丈夫です

$D = u^2 - 4v \geq 0$ となるので、 $x + y = u, xy = v$ の式を使って実数 x, y を消去して u, v のみの式にすると $u^2 - 4v \geq 0$ という条件が付いてきます。

はじめて見る人は少しややこしいかもしれませんが、本当に典型的な問題でよく出題されます。しっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。少し間が空いたのでもう一度問題を書いておきます。

問題

x, y を実数とする、 $x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき $xy + 2(x + y)$ の最大値と最小値を求めよ。

【解答】

$x + y = u, xy = v$ とする。

x, y は実数なので $X^2 - uX + v = 0$ の判別式を D とすると $D = u^2 - 4v \geq 0$ である。

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$(x + y)^2 - xy = 1$$

$$u^2 - v = 1$$

$$xy + 2(x + y) = v + 2u$$

以上より、求める最大値と最小値は

$u^2 - 4v \geq 0, u^2 - v = 1$ のときの、 $v + 2u$ の最大値と最小値と一致するので以下これの最

大値、最小値を求める

$$u^2 - 4v \geq 0$$

$$u^2 - 4(u^2 - 1) \geq 0 \quad \blacktriangleleft v = u^2 - 1 \text{ を代入した}$$

$$-3u^2 + 4 \geq 0$$

$$3u^2 - 4 \leq 0$$

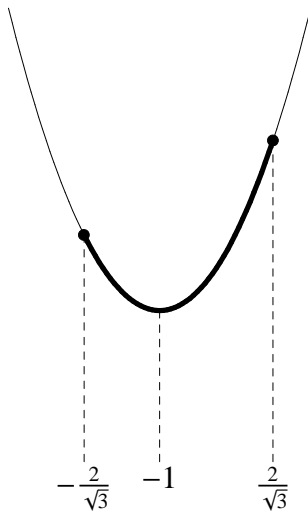
$$(\sqrt{3}u - 2)(\sqrt{3} + 2) \leq 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq u \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \blacktriangleleft v \text{ を消去したときの } u \text{ の範囲が求まった}$$

$$v + 2u$$

$$=u^2 - 1 + 2u \quad \blacktriangleleft v = u^2 - 1 \text{ を代入した}$$

$$=(u + 1)^2 - 2$$



グラフより、 $u = -1$ のとき最小値 -2 をとり、 $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}$ をとる。

今回のプリントはこれで終わりです。この問題はよく出てくる問題なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com