「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

漸化式

こんにちは、河見賢司です。漸化式のプリントを読んでくれて、ありがとうございます。

「漸化式って、まったく意味がわからない」と言っている高校生が多いです。でも、**漸化式にはパターンがあって、そのパターンを覚えていけば誰でもできるよう**になりますよ。

このプリントでは、大学受験に出題されるすべてのパターンを網羅しています。だから、このプリントに掲載している問題がすべて解けるようになれば、大学受験ではどこの大学を受けても対応できるようになりますよ。

こんなことを言うと、「このプリント、難しいんじゃないの？」と思う人もいます。でも、心配しないでください。ごくごく簡単なものですよ。最初のうちは難しく感じる人もいるかもしれません。ですが、繰り返しやっていけば誰でもできるようになりますよ。

また、高校数学全般に言えることです。高校数学は最初のうちは単なる暗記ですよ。そして、暗記すべきことを覚えてはじめて思考力の必要な難しい問題を考えて解けるようになります。

よく、何も覚えていない段階で「数学の点数が全然上がらない … 自分って頭悪いのでは？」という人がいます。でも、ルールを覚えていない段階では誰でもできないですよ。

ただ、困ったことに数学ができるごくごく一部の人（進学校の上位１０パーセントくらい）は、「これは考えないといけない問題」「これは覚えないといけない問題」とその場、その場で一瞬で判断して、問題を解くことができます。

そういう人は決まって「数学は考えることが重要だ」と言います。でも、鵜呑みにしてはダメですよ。そういう人は、覚えないといけないところは暗記しています。このことは大前提です。でも、それ以上できるようになるには考えないとダメですよ、ということです。

今、あなたが数学の成績が良いなら今のままの勉強法でいいですよ。でも、今あなたが自分の現状に満足していないのなら思い切って勉強法を変えてみたらいいですよ。始めの段階では、考えるよりもとにかく暗記する。繰り返し、繰り返しして解けるようになるまで何度も解く！

よく、「暗記数学では、大学受験の問題は対応できない」と言う人もいます。でも、これまでの生徒さんでも暗記のような解き方でも、国立大学医学部医学科と言われる最難関の大学にも合格出来ています。大学受験ってその程度なんです。

暗記、暗記と言ってきました。ですが勉強の進め方は、自分の自由でいいですよ。自分一人だけの力で問題を解けるようになれば必ずできるようになります。

どういうことか説明します。例えば、今回の漸化式のプリントです。このプリントに掲載している問題を、ヒントも何も見ずに自分一人だけの力で解けるようになるまで繰り返してください。

そうなるためのアプローチ法はなんでもいいです。「分からなかったらすぐに答えを見る！」「まったく予習をせずに動画解説を聞く！」「考えることが好きなので、予習をしてから動画解説を聞く！」なんでもいいですよ。

よく、「予習は絶対にしないといけないからな！」とか「考えるのは時間がもったいない、だから考えずに暗記しろ！」なんて解き方を指定する人がいます。でも、個人個人によっ

てあうあわないというのがあります。

だから、どんな勉強の仕方でもいいです。あなたの好きなようにしてください。でも、最終的な目標は「このプリントに載っている問題をすべて自分一人だけの力で解けるようになる」ということです。

一度でできるようになる人はまれです。何度も繰り返してください。

こういうことを言うとよく「何周すればいいですか？」と質問をしてくる人がいます。でも、この質問自体が的外れなんです。最終的な目標は「自分一人でできるようになる」ことなんです。だから、極端な話し１回で完璧に理解できたのならそれでOKですし、１０回しても解けないのならもっともっとする必要があります。

また、「問題はすべて解けるようになりました。でも成績があがらないんです…」という人がいます。でも、そういう人は、ホントは問題が解けるようにはなっていません。

その証拠に「じゃあ、この問題を解いてみて」と本人ができたと言っている問題を解いてもらうと「あれっ？以前はできたのにな…」なんていって解けないことがほとんどです。しかも、１０問出したら７，８問解けないなんてことも多々あります（逆に１０問中７，８問解けたらある程度理解出来ています。それでも、成績はかなり上位にいけますよ）。

これまでいろいろな生徒を見てきました。暗記でも考える方法でも予習をしても予習をしないでもどうでもいいです。自分一人だけの力で、問題を解けるようになった人で成績が上がらなかった人は一人もいません。みんな成績が格段に上がっています。だから、自信をもって進めてください。

繰り返しになります。くどいと思うかもしれないけどもう一度言っておきます。どんな進め方でもいいです。ノーヒントで何も見ずに、問題を解けるようになるまで頑張ってください。そうすれば、あなたの成績が格段にあがります。

補足です。「自分一人で問題を解くことができる」とは「（とある一問の）問題を最初か

ら解きます。それで、最後まで解説などを何も見ずに自分一人だけの力で正解を出すことができること」です。

途中で、ヒントを見て答えてはダメですよ。判断基準は最後まで答えを出すことができたかどうかです。この判断基準を下げないようにしてください。

「解説を見たら分かった」なんかでは、絶対に絶対に成績はあがりませんよ。大変だと思うけど、それが最短の道のりです。頑張ってください。応援してます。

問題 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2$

(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} - a_n = 2n$

【問題 1 の解説】

漸化式は、問題ごとにパターンが決まっています（パターンがない場合は、誘導にのったり、一般項 a_n を推測してからの帰納法など）。

漸化式は解き方さえ覚えてしまえば誰でもできるのに、漸化式が解けないという人が非常に多いです。このプリントでは、解き方を覚えないといけないものはすべて解説します。漸化式は、覚えてしまえばそれほど難しいことありません。覚えるまで、何度も何度も繰りかえしてください。

【問題 1 （1）の解説】

＊ $a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$ 型

$a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$ のとき、ひとつ大きな項である a_{n+1} からひとつ小さな項である a_n を引いた値が一定。差が一定なので、等差数列です。当然一定にあてはまる部分が公差の等差数列です。

【問題 1 （1）の解答】

数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 2 の等差数列である。よって一般項 a_n は $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = \mathbf{2n - 1}$

【問題 1 （2）の解説】

＊ $a_{n+1} - a_n = b_n$ 型は階差数列

（1）同様、左辺は $a_{n+1} - a_n$ だけど右辺が n を含んでいるので、等差数列ではないですよ。$a_{n+1} - a_n = (n\,\text{を含んだ式})$ は階差数列と言います。

階差数列について

$a_{n+1} - a_n = b_n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n \geqq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ となる。

【注】

階差数列のとき、$n \geqq 2$ のときとあるけど、$a_n = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ で求まった式は $n = 1$ のときも成立してくれます。(成立しないものもあるが、あくまで高校数学の問題ではほぼ確実に成立してくれています。) ですから、$a_n = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ で求めた式で、初項があわないときは、どこかで計算ミスをしていると思ってもらって構いません。

ちなみに、$n \geqq 2$ が出てくるもうひとつ有名な式の $S_n - S_{n-1} = a_n$ で求める式は、a_1 は成立することもありますし、成立しないこともあります。

階差数列がなぜ成立するのか、簡単に示しておきます。

【階差数列の公式の証明】

$a_{n+1} - a_n = b_n$ の両辺の和をとる。

$n \geqq 2$ のとき、$\Leftarrow$ 両辺の和をとって $\sum\limits_{k=1}^{n-1}$ とするが、上の $n-1$ の部分は 1 以上の整数でないといけないので、$n - 1 \geqq 1$ つまり $n \geqq 2$ です。

$\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ となる。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_{k1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= \quad (\cancel{a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}} + a_n)
\end{aligned}
$$

◀ $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{k+1}$ の中身を実際に書き出した

$$-(a_1 + \cancel{a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-2}})$$

◀ $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ の中身を実際に書き出した

$$= a_n - a_1$$

◀ 同じ部分は互いに打ち消しあってくれる。残った部分をかき出した！

よって、$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ となるので、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が成立する。

【問題１（２）の解答】

$a_{n+1} - a_n = 2n$

$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \quad \blacktriangleleft \text{階差数列の公式 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ より} \\ &= 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} \\ &= 3 + n(n-1) \\ &= n^2 - n + 3 \end{aligned}$$

$a_n = n^2 - n + 3$ に $n = 1$ を代入すると $a_1 = 1^2 - 1 + 3 = 3$ より $n = 1$ のときも $a_n = n^2 - n + 3$ は成立。

よって、$a_n = \boldsymbol{n^2 - n + 3}$ $(n \geqq 1)$

問題２

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n$

(2) $a_1 = 4,\ a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

【問題２（１）の解説】

今回の問題は、問題３以降の補題のような問題です。まず、（１）からです。$a_{n+1} = 3a_n$ というのは、a_{n+1} のひとつ小さな項 a_n を３倍したらひとつ大きな項である a_{n+1} になるっていうことだよね。

ということは、a_n は公比が３の等比数列です。

【問題２（１）の解答】

数列 $\{a_n\}$ は初項３、公比３の等比数列より、一般項 a_n は $a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \mathbf{3^n}$

【問題２（２）の解説】

この問題なんだけど、もし仮に $a_n - 3 = b_n$ とおくと $b_{n+1} = a_{n+1} - 3$ となるよね。
＊このことが分からないという人がたまにいます。でも、難しく考えなくていいですよ。b_n を b_{n+1} にするには b_n の n の部分を $n+1$ に置き換えたら、b_{n+1} になります。ですから、$b_n = a_n - 3$ のとき、$b_{n+1} = a_{n+1} - 3$ です。

ということは、与えられた式の $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$ は、$b_{n+1} = 2b_n$ とすることができます。これは（１）と同じように考えれば、b_n は公比が３の等比数列だっていうことが分かります。

【問題２（２）の解答】

$a_n-3 = b_n$ とする。$b_1 = a_1-3 = 4-3 = 1$ ◀ 数列 b_n の初項が必要になるから、初項を求めておいた

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項が１、公比が２の等比数列より $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ となる。

$a_n - 3 = 2^{n-1}$ つまり $a_n = \mathbf{2^{n-1} + 3}$

＊最初だから $a_n - 3 = b_n$ と置き換えたけど、このくらいだったら置き換えずに解いた方がラクです。慣れてきたら、下の置き換えずに解く方法でやっていきましょう。

【問題２（２）の別解】

数列 $\{a_n - 3\}$ は、初項 $a_1 - 3 = 4 - 3 = 1$、公比 2 の等比数列である。

$a_n - 3 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$a_n = \mathbf{2^{n-1} + 3}$

問題３

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$

(2) $a_1 = 1,\ 2a_{n+1} = a_n - 2$

【問題３（１）の解説】

＊ $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型

$a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots$ ① で、このままだったら解くことができないんだけど、もし仮に ① の部分が問題２（２）と同じように、$a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha) \cdots$ ② だったら漸化式を解くことができるよね。

だって、これだったら数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、公比が β の等比数列だと解いていけばいいんですから。

そこで、α と β を求める必要があります。② を展開して整理すると、$a_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta + \alpha$ となります。これが ① と一致することより、右辺の a_n の係数と定数項の係数比較をすると $3 = \beta,\ -2 = -\alpha\beta + \alpha$ です。

これより、$\alpha = 1, \beta = 3$ であることが分かります。$\alpha = 1, \beta = 3$ を ② に代入すると、$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ となります。

こうしたら解けるんだけど、ちょっと面倒臭いです。また、はじめてだから $a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha) \cdots$ ② とおいたけど、これって $\beta = 3$ であることはわざわざ書かなくても、$a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots$ ① との係数比較を頭の中ですることにより $\beta = 3$ であることはすぐに分かります。あとは、α の求め方なんだけど、実はこれには簡単に求められてしまう方法があります。

α の求め方

$a_{n+1} = Aa_n + B$ は $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ と変形できる。このときの α は $\alpha = A\alpha + B$ をみたす。ちなみに $\alpha = A\alpha + B$ のことを特性方程式といいます。

なぜ、上記で α を求めることができるかを説明しておきます。

特性方程式で α を求められる理由

$$
\begin{array}{rl}
& a_{n+1} = Aa_n + B \\
-)\ \alpha & = A\alpha + B \longleftarrow \text{特性方程式そのものですよ} \\
\hline
a_{n+1} - \alpha & = Aa_n - A\alpha = A(a_n - \alpha) \longleftarrow \text{これで、確認ができた！}
\end{array}
$$

よく、「漸化式の特性方程式の意味がわからない … 」なんていう人もいます。でも、上記で説明した通りで、$a_{n+1} = Aa_n + B$ は、特性方程式 $\alpha = A\alpha + B$ で求めた α を使うと、$a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ と変形できるというだけです。それで、すべて（数学的には）説明がついています。

よく、「a_{n+1} と a_n と違った値のはずなので、a_{n+1} と a_n の両方に α を代入してる、なんか納得できない … 」なんて言う人もいます。

でも、これってそういう意味ではないんですよね。さっき「特性方程式で α を求められる理由」で説明した通りなんです。勘違いしないでくださいね。もし、「納得できない … 」なんていう人は「こういうものだ」と割り切って、暗記していってください。不思議なもので、時間がたてば分かるようになることも多いですよ。

それでは、＊ $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型の解法についてまとめておきます。

$a_{n+1} = Aa_n + B$ 型の解法

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdots$ ① は特性方程式 $\alpha = A\alpha - B$ で α を求める。

① は $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ と変形できる。

【問題３（１）の解答】

$a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots ①$

特性方程式より
$\alpha = 3\alpha - 2$
$\alpha = 1$

よって、① は $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$、公比 3 の等比数列より、
$a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1} \quad \therefore a_n = \mathbf{3^{n-1} + 1}$

【問題３（２）の解答】

＊この問題だけど、これは $a_{n+1} = Aa_n + B$ の形になっていないよね。a_{n+1} の係数が 1 ではない！まずは、与えられた漸化式の両辺を 2 で割って、a_{n+1} の係数を 1 にします。これで、$a_{n+1} = Aa_n + B$ 形になってくれます。ここからは、（１）とまったく同じように解くことができます。

$2a_{n+1} = a_n - 2$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 \cdots ①$ ◀ 両辺を 2 で割って、$a_{n+1} = Aa_n + B$ の形にした

特性方程式より $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1$ これを解くと $\alpha = -2$

よって、① は $a_{n+1} - (-2) = \frac{1}{2}\{a_n - (-2)\}$ つまり $a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より、

$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \ a_n = \mathbf{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2}$

問題４

$a_1 = 4, a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題４の解説】

＊ $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型

今回の問題には２通りの解き方があります。漸化式には、問題によって複数の解き方があるものもあります。「どうせ解けたらＯＫでしょ」なんて１通りの解き方しか覚えない人がいます。

ただ、漸化式の問題は誘導でこういうふうに解けと指示されることが少なくありません。そんなとき、自分の知っている解法と、違った方の解き方なら困ってしまいます。大変だと思いますが、それほどパターンもある訳ではないので、ぜひともすべての解法を覚えておいてください。

今回の問題は、$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ です。$a_n = Aa_n + B \cdot C^n$ 型とちょっと違う。と思うかもしれませんが、指数法則で計算すると $a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$ と変形できます。ですから、これも $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型です。

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型の解法

【解法その１】

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ の両辺を C^{n+1} で割る。$b_n = \dfrac{a_n}{C^n}$ と表すと、$a_{n+1} = Aa_n + B$ 型になる (問題によっては $a_{n+1} - a_n = (一定)$ の等差数列の形になることもあります)。

【解法その２】

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ の両辺を A^{n+1} で割る。$b_n = \dfrac{a_n}{A^n}$ と表すと、階差数列を利用できる。

それでは、両方の解き方で解いていきます。

【問題４の解法その１の解答】

$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$

$a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{6a_n}{2^{n+1}} + \dfrac{4 \cdot 2^n}{2^{n+1}}$ ◀ 両辺を 2^{n+1} で割った

＊ここからの計算ですが、2^{n+1} は $2 \cdot 2^n$ と変形できます。よって、$\dfrac{6a_n}{2^{n+1}} = \dfrac{6a_n}{2 \cdot 2^n} = \dfrac{3a_n}{2^n} = 3 \cdot \dfrac{a_n}{2^n}$ です。また、$\dfrac{4 \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{4 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n} = 2$ です。

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 3 \cdot \dfrac{a_n}{2^n} + 2$

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく。$b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{4}{2} = 2$ となる。

$b_{n+1} = 3b_n + 2 \cdots ①$ ◀ $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型

＊これ以降は、$a_{n+1} = Aa_n + B$ 型で、特性方程式を使って解いていく漸化式です。

特性方程式より、$\alpha = 3\alpha + 2$ より $\alpha = -1$

これより、① は $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2 + 1 = 3$、公比 3 の等比数列より、

$b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ よって、$b_n = 3^n - 1$ となる。

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ より

$\dfrac{a_n}{2^n} = 3^n - 1$ ◀ $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ に $a_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ を代入した！

$a_n = 2^n(3^n - 1)$ ◀ 両辺に 2^n をかけた！

$\quad = \mathbf{6^n - 2^n}$

⇑ $2^n \cdot 3^n = (2 \cdot 3)^n = 6^n$ です。単なる指数法則 $(ab)^2 = a^n b^n$ を使っただけです。指数法則は自由に使いこなせるようになっておいてくださいね。

【問題４の解法その２の解答】

$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$

$a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{6^{n+1}} = \dfrac{6a_n}{6^{n+1}} + \dfrac{4 \cdot 2^n}{6^{n+1}}$ ◀ 両辺を 6^{n+1} で割った

ここからの計算ですが、6^{n+1} は $6 \cdot 6^n$ と変形できます。よって、$\dfrac{6a_n}{6^{n+1}} = \dfrac{6a_n}{6 \cdot 6^n} = \dfrac{a_n}{6^n}$

また、$\dfrac{4 \cdot 2^n}{6^{n+1}} = \dfrac{4 \cdot 2^n}{6 \cdot 6^n} = \dfrac{4}{6}\left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ です。

$\dfrac{a_{n+1}}{6^{n+1}} = \dfrac{a_n}{6^n} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{6^n}$ とおく。$b_1 = \dfrac{a_1}{6^1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ となる。

$b_n = b_n + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ◀ 階差数列の形になった！

$n \geqq 2$ のとき

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ◀ 階差の公式より

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \dfrac{1}{3}}$ ◀ $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ は初項 $\dfrac{1}{3}$ 公比 $\dfrac{1}{3}$ の初項から第 $n-1$ 項までの和より

$= \dfrac{2}{3} + \cancel{\dfrac{2}{3}} \dfrac{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{\cancel{\dfrac{2}{3}}}$

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$= 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

これは、$n = 1$ のときも成立する。よって、$n \geqq 1$ のとき、$b_n = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となる。

⇑階差数列のときは $n = 1$ のときも成立してくれます。ただし、この部分をしっかりと答案に書いておかないと減点されますよ。

$b_n = \dfrac{a_n}{6^n}$ より、$\dfrac{a_n}{6^n} = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 　　　　よって $a_n = \mathbf{6^n - 2^n}$

問題5

$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題5の解説】

＊ $a_{n+1} = \dfrac{Aa_n}{Ba_n + C}$ 型

このときは、両辺の逆数をとるとうまくいきます。ただ、分母に0がくるとまずいので逆数をとるときに、0でないということを説明しておく必要があります。

$a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n+C}$ 型の解法

両辺の逆数をとることによって、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ で表せます。後は、$a_{n+1} = Aa_n + B$ 型になってくれます。

【問題5の解答】

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3} \cdots ①$

＊まずは $a_n \neq 0$ であることを示します。厳密に言うと、数学的帰納法でもっと丁寧に解いた方がよいかもしれません。

ただ、$a_n \neq 0$ であることの証明は、このように簡単な記述で減点されることはまずないので、以下のようなもので大丈夫です。

$a_{n+1} = 0$ と仮定する。このとき、① より、$a_n = 0$ となる。

これを繰り返すと、$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$ となる。これは、$a_1 = \dfrac{1}{2}$ に反する。よって、すべての自然数 n において $a_n \neq 0$ である。

＊ $a_n \neq 0$ であることを示せたので、ここから両辺の逆数をとって解いていきます。

$a_n \neq 0, a_{n+1} \neq 0$ より、① の両辺の逆数をとる

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}} + \frac{3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{3}{a_n}$$

ここで、$\frac{1}{a_n} = b_n$ とする。

$b_{n+1} = 3b_n + 2 \cdots$ ② となる。また、$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

＊大丈夫だと思うけど、念のために話しておきます。$\frac{1}{\frac{1}{2}}$ は $1 \div \frac{1}{2}$ なんてやる方法もあるけど、分数の中に分数が含まれているとき、分母分子にてきとうな数をかけて分数の中の分数を消去するという方向で考えていくのがラクです。

今回の場合 $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{1} = 2$ としました

特性方程式より $\alpha = 3\alpha + 2$ より $\alpha = -1$

よって、② は $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3$、公比 3 の等比数列より $b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$ となる。よって、$b_n = 3^n - 1$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ より、$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^n - 1}$

$\therefore \ a_n = \mathbf{\frac{1}{3^n - 1}}$

問題６

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題６の解説】

＊ $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型

この問題も問題５と同じく２通りの解法があります。まずひとつめは $a_{n+1} - a_n$ を求めてから解く方法。そして、もうひとつめは $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta)$ とおいて解いていくものです。

個人的には、後者の解き方がおすすめなのですが、教科書では前者のやり方のみが載っているということが多いです。両方ともの解法で解けるようになっておいてください。

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型の解法　その１

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C \cdots ①$

① で n を $n+1$ で置き換える $a_{n+2} = Aa_{n+1} + B(n+1) + C \cdots ②$

② − ① より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2} = Aa_{n+1} + B(n+1) + C \\ -) & a_{n+1} = Aa_n + Bn + C \\ \hline & a_{n+2} - a_{n+1} = A(a_{n+1} - a_n) + B \end{array}$$

ここで $b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると、$a_{n+2} - a_{n+1} = A(a_{n+1} - a_n) + B$ は $b_{n+1} = Ab_n + B$ となます。

b_n を求めてから a_n を求めていきます。

【問題６の解答　その１】

$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \cdots ①$ とする。① より、$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n \cdots ②$ とする。

② − ① より、

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$ となる。

ここで、$b_n = a_{n+1} - a_n$ とする。$b_{n+1} = 2b_n + 1$ となる。

また、①に $n = 1$ を代入すると $a_2 = 2a_1 - 1 = 2\cdot 1 - 1 - 1 = 2$ となる。$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ となる。

⇑数列 $\{b_n\}$ の初項を求めた

まずは数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めます。

$b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1 \cdots$ ③

特性方程式より $\alpha = 2\alpha + 1$ よって $\alpha = -1$

これより ③ は $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$、公比 2 の等比数列より、$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$。
よって $b_n = 2^n - 1$ となる。

$a_{n+1} - a_n = b_n$ より $a_{n+1} - a_n = 2^n - 1$

$n \geqq 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k - 1) \quad \text{◀ 階差数列の公式より} \\
&= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) \\
&= 1 + 2(2^{n-1} - 1) - n + 1 \\
&= 2^n - n
\end{aligned}
$$

$a_n = 2^n - n$ は $n = 1$ のときも成立する。よって、$a_n = \boldsymbol{2^n - n}$

＊長かったよね。でも、一連の流れをすべて覚えてしまうしかできるようになる方法はないんです。頑張って覚えてくださいね。

それでは、次の解法に進みます。

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型の解法　その 2

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C \cdots$ ①

① が $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta) \cdots$ ② のように変形できるとします。

① と ② の係数を比較して α, β を求めます。

ここからは ② の式より、数列 $\{a_n\} + \alpha n + \beta$ は、初項 $a_1 + \alpha + \beta$、公比 A の等比数列と解いていくだけです。

【注】
上記の ② の $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta) \cdots$ がなかなか覚えられません。という人がいます。確かに覚えにくいですよね。

漸化式の式変形のポイントとしては、左辺を $n+1$ の式に右辺を n の式にすることです（もちろんいろいろなパターンがあるので一概には言えませんよ。でも、典型的なパターンとしては、左辺を $n+1$ の式に、右辺を n の式にします）。

これまでの問題の漸化式を思い出して欲しいんだけど、特性方程式を使って $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ なんて変形したよね。

これもよく見ると左辺が $n+1$ の式、右辺が n の式です。で、今回も同様に左辺を $n+1$、右辺を n の式にしたいです。

このあたりのことを意識すれば覚えられると思います。

【余談です。興味のない人はスルーしてください】
上記の説明でかえってわかりにくくなったという人ごめんなさいね。うまく説明できていなかったかもしれません。

この問題に限った訳ではないんですけど、分からなかったらとりあえず覚えてもらえばいいですよ。

「えっ、覚えるなんて難しい」と思う人もいると思います。でも、暗記って繰り返しやったら、誰でも覚えてしまいます。例えば、あなたが電車通学だったとします。全然意識

しなくても、停車する駅の名前なんか覚えてしまうよね？それと同じ、人間ってテキトウに接しているつもりでも、同じ情報に接していたら、暗記してしまうものなんです。

１回でできないと嘆いてないで、できるようになるまで何度もやってください。「覚えるまで、何回でもするぞ！」なんて決意すると意外にはやくできるようになっています。

ＰＳ
さらに余談が続きます。よく「暗記数学なんて意味がない … 」なんて言う人がいます。その気持ちよく分かります。

でも、僕は自慢じゃないけど、暗記数学でした。あまり頭がよくなかったので、理解しながら進めるなんて無理でした。最初は、がんばろうとしていたのですが、途中で「オレには、無理」ということで。解き方を暗記していきました。

暗記してある程度、問題が解けるようになってから、参考書を見直してみると、「ああ、こういうことを言っているのか」ということを理解することができるようになりました。

あなたが、ひとつずつ理解して進めていけるようなら、別にいいですよ。でも、ちっとも分からないのに、『数学は理解することが重要なんだ』なんて言い張って前に進めないようなら、暗記でどんどん進めてもらったらいいですよ。

心配しなくても大丈夫です。必ずできるようになります。今、解いてもらっているテキストの問題が解けるようになっていて（暗記数学でも、ひとつずつ理解でもどっちでもいいですよ）できるようにならなかった人は一人もいません。全員例外なくできるようになっています。

結局、アプローチの仕方は自由なんですよね。問題が自分一人だけの力で解けるようになればそれでＯＫです。自信をもってやってください。

長すぎる余談でした。ごめんなさいね。それでは、引き続き頑張って下さい。

【問題６の解答　その２】

$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \cdots$ ① とする。

α, β を定数として $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta) \cdots$ ② とする。

② を変形すると $a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + \beta - \alpha$ となる。これと ① を比較して

$\alpha = 1, \beta - \alpha = -1$ となる。よって $\alpha = 1, \beta = 0$

② は $a_{n+1} + (n+1) = 2(a_n + n)$ となる。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$、公比 2 の等比数列より

$a_n + n = 2 \cdot 2^{n-1}$ となる。よって、$a_n = \boldsymbol{2^n - n}$

＊２つめの解法の方が、計算量としては断然少なくて解くのもラクだよね。でも、最初にも話したけど漸化式って誘導がついていて「こう解きなさい」ということも少なくないです。だから、「片方の解法で解けたら OK でしょ」ではなくて、両方の解法で解けるようになっておいてください。

問題 7

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n = n^2 + 4n$ であるとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 7 の解説】

まずは、以下の事柄を覚えてください。

S_n について

S_n がきたら次の事柄を使う。

① $S_1 = a_1$

② $n \geqq 2$ のとき、$a_n = S_n - S_{n-1}$

まず、① の $S_1 = a_1$ なんだけど、これは簡単です。S_nっていうのは、初項から第 n 項までの和です。だから、S_1 は初項から初項までの和、つまり $S_1 = a_1$ です。

S_n が与えられていて、a_1 が与えられていないという問題がよくあります。そんなとき、この $S_1 = a_1$ より、a_1 を求めます。

つぎに、② の、$n \geqq 2$ のときの $a_n = S_n - S_{n-1}$ です。

S_nっていうのは、日本語で言うと「初項から第 n 項までの和」です。S_n を実際に書き出してみると $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ となります。

次に S_{n-1} というのは、初項から第 $n-1$ 項までの和です。これも、書き出してみると $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ となります。

S_n から S_{n-1} をひくと、以下のようになります。

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & \cancel{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} + a_n \\
-)\ S_{n-1} = & \cancel{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \\
\hline
S_n - S_{n-1} = & a_n
\end{array}
$$

上記のようになるので、S_n から S_{n-1} をひくことによって、$S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するということを確認できると思います。

ただ、ここで注意しないといけないことがあります。$S_{\bigcirc}$ の◯の部分は自然数じゃないといけません。$n = 1$ のとき、S_{n-1} に $n = 1$ を代入すると $S_{1-1} = S_0$ となるので、$S_{\bigcirc}$ の◯の部分が 0 になってしまいます。

0 は自然数でないので、このときは成立しません。ですから、$S_n - S_{n-1} = a_n$ の公式が成立するには $n \geqq 2$ という条件が必要になります。

この S_n の公式の最後に覚えておかないといけないことは、②で求まった $n \geqq 2$ のときの a_n は $n = 1$ のとき、成立することも成立しないこともあります。

一方で、階差数列も $n \geqq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で a_n が求まりますが、この求まった a_n は $n = 1$ のときでも必ず成立してくれます（厳密に言えば、成立しない数列もあることはるのですが、高校数学の範囲でそういった問題はまず出てこないと思います）

【問題 7 の解答】

$S_n = n^2 + 4n$

$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5$

$n \geqq 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^2 + 4n - \left\{(n-1)^2 + 4(n-1)\right\} \\
&= n^2 + 4n - n^2 + 2n - 1 - 4n + 4 \\
&= 2n + 3
\end{aligned}
$$

これは、$n = 1$ のときも成立する。
$\Uparrow$ $a_n = 2n + 3$ に $n = 1$ を代入すると、$a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ より、$n = 1$ のときも $a_n = 2n + 3$ は成立

よって、$a_n = \mathbf{2n + 3}$ $(n \geqq 1)$

問題８

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

【問題８の解説】

＊ $a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$ 型

$a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$ のタイプの漸化式は隣接３項間の漸化式と呼ばれています。難しく感じる人も多いけど、覚えてしまえばワンパターンで解けてしまいますよ。解き方を覚えておいてくださいね。

隣接３項間の漸化式の解法

$a_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = 0 \cdots ①$

特性方程式 $x^2 + Bx + C = 0$ の２解が α, β のとき

① は

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ②$

$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots ③$

の２通りに変形できる。

以下、② より、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列

③ より、数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は公比 α の等比数列

として解いていきます。

特性方程式が重解のとき、その重解を α とすると ① は $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できます。

【注】
上記の式変形がなぜ成立したのか話しておきます。ただ、知らなくてもこの隣接３項間の漸化式は解けてしまうので、興味がないという人は無視してもらって大丈夫です。

特性方程式 $x^2+Bx+C=0$ の２解が α,β です。解と係数の関係により $\alpha+\beta=-B, \alpha\beta=C$ です。

先ほどの式、②, ③ ともに変形して整理すると $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ です。で、この式に、解と係数の関係で求まった式 $\alpha+\beta=-B, \alpha\beta=C$ 代入すると $a_{n+2}+Ba_{n+1}+Ca_n=0$ となってくれます。

このことより、上記の式変形が成立するということを確認することができました。では、問題に戻ります。

この隣接３項間の漸化式は、

① 特性方程式が異なる２つの実数解（しかもともに解が１でない）をもつとき、

② 特性方程式が異なる２つの実数解をもちそのうちの一方が１のとき、

③ 特性方程式が重解をもつとき、

の３つの場合に問題を分けているということがあります。

問題を解きながら話していきますが、重解をもつときの解き方は重解をもつときにしかできないと思い込んでいる人もいますが、そんなことはありません。他の場合でも、解くことができます。それでは、問題に進みます。

【問題８（１）の解説】

この問題の特性方程式は $x^2-5x+6=0$ で、この方程式の解は２と３です。この場合、$a_{n+1}-\alpha a_n$ と $a_{n+1}-\beta a_n$ の両方を求めて解いていくのが一番ラクな解法です。

問題を解くときに話しますが、この問題でもどちらか一方だけでも求めたらそこから求めることができます（ちょっとだけ面倒くさくなると思います）。それでは、解答に進みます。

【問題８（１）の解答】

$a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \cdots ①$

特性方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ の解は $x = 2, 3$

よって、① は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \cdots ②$ と $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n) \cdots ③$ と変形できる

＊上記の ②, ③ を作る式変形はもう丸暗記しておかないとダメなんだけど、不安になった場合実際に展開してみたら、合っていると確認することができますよ。

② より、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$、公比 3 の等比数列より
$a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \cdots ②'$

③ より、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 2$、公比 2 の等比数列より
$a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \cdots ③'$

＊ここからは ②′ − ③′ をすることで、a_{n+1} が消えて a_n を求めることができます！

②′ − ③′ より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} - 2a_n = 3^n \\ -) & a_{n+1} - 3a_n = 2^n \\ \hline & a_n = 3^n - 2^n \end{array}$$

以上より、$a_n = \mathbf{3^n - 2^n}$

＊以上で求めることができました。この問題ですけど、②′ または ③′ のどちらか一方からでも求めることができます。移行すると、$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型になってくれます。特性方程式が重解のときには、この方法で解くしかありません。

それでは、別解として、この方法で解いてみます。今回は、②′ の方でやってみるね。別に、③′ を使ってもいいですよ。どちらでも大差ありません。

【問題８（１）の別解（途中から)】

②′ より、

$a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}$ ◀ 両辺を 3^{n+1} で割って整理した。

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とする。$b_1 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$b_{n+1} = \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{3} \cdots$ ②″

特性方程式 $\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$ より、$\alpha = 1$

よって、②″ は $b_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{3}(b_n - 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $b_1 - 1 = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$、公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$b_n - 1 = -\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となる。

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ より、$\dfrac{a_n}{3^n} = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1$

よって、$a_n = \mathbf{3^n - 2^n}$

＊このように、隣接３項間の漸化式は、重解でなくてもどちらかひとつのみの式で解くことができます。ただ、一方だけ求める方がやや面倒なので、重解でないときはひとつめの解き方で解いていくことが多いですよ。

【問題８（２）の解説】

（２）の問題も特性方程式を解くと、$x^2 + 3x - 4 = 0$ の解は $x = 1, 4$ です。このときも

（１）と同じように解いていってもらってもいいんですけど、特性方程式の解が 1 のときは、次の解答のように解くことが多いです。

多くの教科書では、$a_{n+1}-a_n$ を求めて解いていくことが多いですが、違う方でやってもらった方が計算がラクだと思いますよ。どっちでも解けます。両方で解いておくね。

【問題８（１）の解答】

$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0\cdots$①

特性方程式より $x^2+3x-4=0$ これを解くと $x=1,-4$

これより、① は $a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_1)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=2-1=1$、公比 -4 の等比数列より

$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$
⇑ここからは単なる階差数列です。

$n\geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(-4)^{k-1} \\ &= 1+\frac{1-(-4)^{n-1}}{1-(-4)} \\ &= \frac{6-(-4)^{n-1}}{5} \end{aligned}$$

$a_n=\dfrac{6-(-4)^{n-1}}{5}$ は $n=1$ のときも成立する。よって、$a_n=\boldsymbol{\dfrac{6-(-4)^{n-1}}{5}}$

【問題８（２）の別解】

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-a_n)$ で、$\alpha=-4, \beta=1$ としてできる $a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n$ を使ってといていきます。

$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0\cdots$①

特性方程式より $x^2+3x-4=0$ これを解くと $x=1,-4$

これより、① は $a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1}+4a_n\}$ は定数数列であり、$a_{n+1}+4a_n=a_n+4a_{n-1}=\cdots=a_2+4a_1=2+4\cdot 1=6$ である。

＊上記が分からないという人がいます。よく分からない人は、$b_n=a_{n+1}+4a_n$ とおいてください。そうすると、$b_{n+1}=a_{n+2}+4a_{n+1}$ です。$a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n$ は、$b_{n+1}=b_n$ となるので、定数数列になります。

定数数列は各項の値がすべて等しいので、$b_n=b_1$ で、ここから $a_{n+1}+4a_n=a_2+a_1=6$ になります。

$a_{n+1}+4a_n=6$ より、$a_{n++1}=-4a_n+6\cdots$① ◀ これは一番簡単な $a_{n+1}=Aa_n+B$ 型の漸化式

特性方程式より $\alpha=-4\alpha+6$ よって $\alpha=\dfrac{6}{5}$

これより ① は $a_{n+1}-\dfrac{6}{5}=-4\left(a_n-\dfrac{6}{5}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n-\dfrac{6}{5}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{6}{5}=1-\dfrac{6}{5}=\dfrac{1}{5}$、公比 -4 の等比数列より

$$a_n-\frac{6}{5}=\frac{1}{5}\cdot(-4)^{n-1}$$
$$a_n=\boldsymbol{\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}}$$

＊どっちの方法でも当然答えは同じになります。ひとつめの解き方だと階差数列が出てきます。一方、ふたつめの解き方だと、定数数列が出てきてくれてそのあとの漸化式も一番簡単なパターンのものです。今回の問題は２つめの解き方の方がおすすめです。

【問題８（３）の解答】

＊これは、特性方程式の解が重解になるものです。このときは、（１）のふたつ目の解法で解いていくしかありません。

$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0\cdots$①

特性方程式より $x^2-6x+9=0$ この解は $x=3$ となる。

よって、① は $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$ と変形できる

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 2$、公比 3 の等比数列より $a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ となる。

$a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 3^{n-1}$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{2}{9}$ ◀ 両辺を 3^{n+1} で割って整理した

ここで $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とする。

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{2}{9}$

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2}{9}$

数列 b_n は初項 $b_1 = \dfrac{a_1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$、公差 $\dfrac{2}{9}$ の等差数列より、

$b_n = \dfrac{1}{3} + (n-1) \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2n+1}{9}$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ より

$\dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{2n+1}{9}$

$a_n = \mathbf{3^{n-2}(2n+1)}$

問題９

$a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 2b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題９の解説】

＊連立漸化式　その１

連立漸化式と呼ばれるものです。この問題は誘導付きで出題されることが多いです。今回の問題もそうですが、誘導がない場合２式を足したり引いたりしたらうまくいくことが多いです（これでうまくいかない場合は次の問題１０で解説します）。

$a_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots ①$, $b_{n+1} = a_n + 2b_n \cdots ②$ とします。

何も条件が与えられていないので、とりあえず ① + ②, ① − ② をしてみます。

＊どこから ① + ②, ① − ② が出てきたの？なんて思う人もいると思います。

まあ、これは知っているから出てきただけで、別に数学的な根拠がある訳ではありません。

ただ、この問題に限った話ではなくどの単元でも、似ている２式が与えられているとき２式を足したり、引いたりするとうまくいくことが多いです。

このことは、意外に重要です。覚えておいてくださいね。

① + ② より
$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3(a_n + b_n)$
⇑ 数列 $\{a_n + b_n\}$ は等比数列これで、解ける形になってくれている。

① − ② より
$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n$
⇑ 数列 $\{a_n - b_n\}$ は定数数列。解ける形になってくれている。

【問題９の解答】

①＋②より

$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3\,(a_n + b_n)$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$、公比 3 の等比数列より、$a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \cdots$ ①′

①－②より

$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1 - 3 = -2$ の定数数列より、$a_n - b_n = -2 \cdots$ ②′

①′＋②′より

$$\begin{array}{rl} & a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \\ +) & \underline{a_n - b_n = -2} \\ & 2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2 \end{array}$$

$\therefore\ a_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$

①′－②′より

$$\begin{array}{rl} & a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \\ +) & \underline{a_n - b_n = -2} \\ & 2b_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 2 \end{array}$$

$\therefore\ b_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1} + 1}$

問題１０

$a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題１０の解説】

＊連立漸化式　その２

問題９に引き続いて連立漸化式の問題です。問題３２と同じように ① + ② や ① − ② をしてみてもうまくいきません。

こういった連立漸化式の場合、誘導がついていることが多いです。ですが、誘導なしでも出題されることがある（特に数学 III）ので、解き方を覚えて解けるようになっておいてください。

この連立漸化式には２通りの解法があります。まず、ひとつめは連立方程式のように解く方法です。どういうことかというと、今回与えられた式には、ひとつの式の中に a_n や b_n が混ざっています。これを連立方程式を解くように、どちらかを消去して a_{n+1} と a_n のみ、または b_{n+1} と b_n のみの式にして解いていきます。

消去した後は、隣接３項間の漸化式になります。

そして、もうひとつの解法は強引に $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ をみたす α, β を求めて、ここから数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ は公比 β の等比数列より … と解いていきます。

【問題１０の解答　その１】

＊連立方程式のように片方を消去して解いていきます。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \cdots ② \end{cases}$$ とする。

① より、$b_n = a_{n+1} - 3a_n \cdots ①'$

また、$b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} \cdots ①''$ ◀ ①′ で n を $n+1$ で置き換えた

①′, ①″ を ② に代入すると

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_n + 4(a_{n+1} - 3a_n)$
$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \cdots$ ③

＊ここからは単純な隣接３項間の漸化式です。

特性方程式より $x^2 - 7x + 10 = 0$ を解くと $(x-2)(x-5) = 0$ より

③ は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5\,(a_{n+1} - 2a_n)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = (3a_1 + b_1) - 2a_1$ ◀ ① より $a_2 = 3a_1 + b_1$ が成立 $= a_1 + b_1 = 4$、公比 5 の等比数列より

$a_{n+1} - 2a_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdots$ ④

また、③ は $a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2\,(a_{n+1} - 5a_n)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は初項 $a_2 - 5a_1 = (3a_1 + b_1) - 5a_1 = -2a_1 + b_1 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$、公比 2 の等比数列より、$a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1} \cdots$ ⑤

④ − ⑤ より
$a_{n+1} - 2a_n - (a_{n+1} - 5a_n) = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$
$3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \cdots$ ⑥

⑥ で n を $n+1$ で置き換えると $a_{n+1} = \dfrac{4}{3} \cdot 5^{(n+1)-1} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{(n+1)-1} = \dfrac{20}{3} \cdot 5^{n-1} - \dfrac{2}{3} \cdot 2^{n-1} \cdots$ ⑥′

⑥, ⑥′ を ①′ に代入すると
$b_n = \dfrac{20}{3} \cdot 5^{n-1} - \dfrac{2}{3} \cdot 2^{n-1} - 3\left(\dfrac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n-1}\right) = \dfrac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$

以上より $\boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n-1}},\ \boldsymbol{b_n = \dfrac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n-1}}$ となる。

【問題１０の解法　その２】

＊強引に $a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)$ とする解法

この解法の場合、ほとんどの場合問題で設問という形で以下のような誘導がつきます。

「$a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)$ をみたす α,β を求めよ」という誘導がつきます。ただ、誘導がなかったとしても、この解き方で解いていってもらって大丈夫です。

もし、$a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)$ というふうになったとしたら数列 $\{a_n+\beta b_n\}$ は公比が α の等比数列として解いていくことができます。

【問題１０の解答　その２】

$$\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+b_n\cdots① \\ b_{n+1}=2a_n+4b_n\cdots② \end{cases}$$ とする。

α,β を定数として $a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)=\alpha a_n+\alpha\beta b_n\cdots③$ をみたす α,β を求める。

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\beta b_{n+1}&=3a_n+b_n+\beta(2a_n+4b_n)\ (\because ①,②\text{を代入した}) \\ &=(3+2\beta)\,a_n+(1+4\beta)\,b_n\cdots④ \end{aligned}$$

③, ④ の右辺同士は等しいので、

$3+2\beta=\alpha\cdots⑤$,　$1+4\beta=\alpha\beta\cdots⑥$ が成立する。
⇑ a_n と b_n の係数を比較した！

⑤, ⑥ を解くと $(\alpha,\beta)=\left(2.-\frac{1}{2}\right),(5,1)$ となる。

$(\alpha,\beta)=\left(2.-\frac{1}{2}\right)$ のとき、③ に $\alpha=2,\beta=-\frac{1}{2}$ を代入すると、$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$ となる。

これより、数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{2}b_1=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$、公比 2 の等比数列より、
$a_n-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdots⑦$ となる。

$(\alpha, \beta) = (5.1)$ のとき、③ に $\alpha = 5, \beta = 1$ を代入すると、$a_{n+1} + b_n = 5 \cdot (a_n + b_n)$ となる。

これより、数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$、公比 5 の等比数列より、
$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdots$ ⑧ となる。

⑦ − ⑧ より
$a_n - \frac{1}{2}b_n - (a_n + b_n) = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}$
$-\frac{3}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}$
$b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} \cdots$ ⑨

⑨ を ⑧ に代入すると
$a_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} = 4 \cdot 5^{n-1}$
$a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1}$
$\quad = \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$

以上より $a_n = \boldsymbol{\frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}}$, $b_n = \boldsymbol{\frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}}$

問題１１

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$, $(n+2)a_{n+1} = na_n$

(2) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n+3}a_n$

(3) $a_1 = 1$, $(n+3)a_{n+1} = 2na_n$

【問題１１の解説】

＊真ん中をかける漸化式

このタイプの問題は、知らない人も多くて初見では難しいと思います。でも、覚えてしまえば簡単です。真ん中のものを両辺にかけるだけで、できてしまいます。

【問題１１（１）の解説】

問題は、$(n+2)a_{n+1} = na_n$ です。この場合、$n+2$ と n の真ん中の $n+1$ を両辺にかけたらうまくいきます。こんなの知らなかったら絶対にできないので、覚えておいてくださいね。

$(n+2)a_{n+1} = na_n$ の両辺に $n+1$ をかけると、$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)\,n\,a_n$ になります。これで、「ああ、解ける形になったな」と思って欲しいんだけど、よく分からない人は $b_n = (n+1)\,n\,a_n$ とでもおいてみてください。

そうすると $b_{n+1} = (n+2)(n+1)a_{n+1}$ となるので左辺と一致します。このことより、$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)\,n\,a_n$ は $b_{n+1} = b_n$ となるので数列 $\{b_n\}$ は定数数列です。当然、$b_n = b_1$ として解いていきます。

＊意外に簡単だったよね。この真ん中をかけるタイプの問題は、難しそうだけであっさりと解けてしまいます。解法を覚えておいてくださいね。

【問題１１（１）の解答】

$(n+2)a_{n+1} = na_n$ の両辺に $(n+1)$ をかける。

$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)\,n\,a_n$

数列 $\{(n+1)na_n\}$ は定数数列。よって、$(n+1)na_n = (1+1)\cdot 1\cdot a_1 = 2$

$$\therefore\ a_n = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n(n+1)}}$$

【問題１１（２）の解説】

$a_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n+3}a_n$ を式変形します。まず、最初の式変形は、とりあえず両辺に $2n+3$ をかけます。

分数を消去したいから両辺に $2n+3$ をかけたのではありません。

漸化式の問題は、左辺を $n+1$ の式に、右辺を n の式にするということが多いです。ですから、大きい方が左辺に来ます。今回の場合 $\dfrac{2n-1}{2n+3}$ ですが、大きい分母が左辺にくるように両辺に $2n+3$ をかけました。

ちなみに、もし仮に $a_n = \dfrac{2n+3}{2n-1}a_n$ と分母分子が逆になった形であったとします。このときも、左辺の方を大きい式にしたいので両辺を $2n+3$ で割って、$\dfrac{a_n}{2n+3} = \dfrac{a_n}{2n-1}$ として考えていきます。

漸化式独特な考え方なので、しっかりと覚えておいてくださいね。

では、両辺に $2n+3$ をかけてところまで戻ります。元の式の両辺に $2n+3$ をかけると $(2n+3)a_{n+1} = (2n-1)a_n$ になるよね。

ここからは、真ん中をかけます。$2n+3$ と $2n-1$ の真ん中の $2n+1$ を両辺にかけます。

$(2n+3)(2n+1)a_{n+1} = (2n+1)(2n-1)a_n$ です。これで、$b_n = (2n+1)(2n-1)a_n$ とすると、$b_{n+1} = b_n$ となり、（１）同様、数列 $\{b_n\}$ は定数数列です。

【問題１１（２）の解答】

$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+3}a_n$

$(2n+3)a_{n+1} = (2n-1)a_n$

$(2n+3)(2n+1)a_{n+1} = (2n+1)(2n-1)a_n$ ◀ 両辺に $(2n+1)$ をかけた

数列 $\{(2n+1)(2n-1)a_n\}$ は定数数列。

$(2n+1)(2n-1)a_n = (2\cdot1+1)(2\cdot1-1)\cdot5 = 15$

よって、$a_n = \boldsymbol{\frac{15}{(2n+1)(2n-1)}}$

【問題１１（３）の解説】

今回の問題は、少し珍しいです。ですけど、「ああ、こんなパターンもあるんだな」と思って聞いてください。

今回の問題は、$(n+3)a_{n+1} = 2na_n$ です。$n+3$ と n の真ん中の $n+\frac{3}{2}$ をかけるのかな？なんて思う人もいるかもしれませんが、これではうまくいきません。

n の部分は整数ですので、漸化式で分数がきたらうまくいきません。

結論から言えば、今回の問題は両辺に $(n+1)(n+2)$ をかけます。n と $n+3$ の間が $n+1$ と $n+2$ なので、$(n+1)(n+2)$ を両方にかけました。

＊「こんなの思いつかないよ」なんて思った人は、解法を覚えてくださいね。この問題に限った話ではないですが、数学って「こんな解法もあるんだ」ということをどんどん頭の中にストックしていってください。

そうしてはじめて思考力の必要な難しい問題にもとりかかることができるようになってきます。

数学には、考えるために道具が必要なんですね。大変だと思いますけど、今自分は道具を手に入れている状態なんだな、と割り切ってどんどんと頭の中に解法をためていってください。

【問題１１（３）の解答】

$(n+3)a_{n+1}=2na_n$ の両辺に $(n+2)(n+1)$ をかける。

$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1}=2(n+2)(n+1)na_n$ となる。ここで、$b_n=(n+2)(n+1)na_n$ とおくと、$b_{n+1}=2b_n$ となる。

$b_1=(1+2)\cdot(1+1)\cdot 1\cdot a_1=6$ より、数列 $\{b_n\}$ は初項 6、公比 2 の等比数列となる。

$b_n=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$

$(n+2)(n+1)na_n=3\cdot 2^n$ より、$a_n=\boldsymbol{\dfrac{3\cdot 2^n}{n(n+1)(n+2)}}$ となる。

問題１２

$a_1 = -1, a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。
(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
(2) 一般項 a_n を求めよ。

【問題１２の解説】

（１）で、a_2, a_3, a_4 を求めよ、となっています。ですが、最終的に解かせたい問題としては（２）の「数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ」です。

$a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ は、これまで勉強をしてきたどのパターンにもあてはまらない漸化式だよね。こういった漸化式は、「一般項 a_n を推測して、そこから漸化式で示す」といった解法で解くことが多いです。

特に、今回の問題は（１）で a_2, a_3, a_4 を求めなさいなんだよね。こういったときは、まず間違いなく「推測して帰納法」で解くと思ってもらっていいですよ。

今回の問題は、（１）と（２）と誘導がありました。ですが、誘導がなくても、パターンにあてはまらない場合「推測して帰納法かな？」と気づけるようになっておいてください。

【問題１２（１）の解答】

＊これは単純に $a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ に、$n = 1, 2, 3$ をそれぞれ代入するだけですよ。

$a_2 = a_1^2 + 2 \cdot 1 \cdot a_1 - 2$ ◀ $a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ に、$n = 1$ を代入した！

$= (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2$

$= 1 - 2 - 2$

$= \mathbf{-3}$

$a_3 = a_2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a_2 - 2$ ◀ $a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ に、$n = 2$ を代入した！

$= (-3)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) - 2$

$= 9 - 12 - 12$

$= \mathbf{-5}$

$a_4 = a_3^2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 - 2$ ◀ $a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ に、$n = 3$ を代入した！

$= (-5)^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-5) - 2$

$= 25 - 30 - 2$

$= \mathbf{-7}$

【問題１２（２）の解説】

（１）より、$a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -5, a_4 = -7$ です。ということは、初項 -1 で公差 -2 の等差数列かな？と予想できるよね。

だから、$a_n = -1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 1$ と推測できます。

ここから帰納法です。

＊よく、「こういった問題では、なんで帰納法が必用なの？」と質問されます。今回の問題で言えば、a_1, a_2, a_3, a_4 は $a_n = -2n + 1$ になっているということはわかったんだよね。

でも、一般項は通常すべての自然数において成立するものです。（おそらくあっているとは思うけど）$1, 2, 3, 4$ 以外の $n \geqq 5$ で $a_n = -2n + 1$ となっている確証はないんです。だから、帰納法ですべての自然数において成立するということを示す必要があります。

それでは、帰納法の証明に進みます。今回示すのは $a_n = -2n + 1$ がすべての自然数において成立するということです。示しやすいように、$a_n = -2n + 1 \cdots$ ① とでもしておきます。

帰納法は $n = 1$ のとき ① が成立していることを示し、$n = k$ のとき ① が成立していると仮定して、$n = k + 1$ のときも成立しているということを示すんだよね。

$n = 1$ のときは（１）より成立しています。だから、後半を示せば OK です。

流れとしては、「$n=k$ のとき ① が成立すると仮定して、$n=k+1$ のときも ① が成立する」ということを示します。

少し砕けた日本語で言えば、$n = k$ のときの ① の式、つまり $a_k = -2k+1$ を使って、$n=k+1$ のときも ① が成立つまり $a_{k+1} = -2(k+1)+1$ が成立すれば OK です。

問題文で与えられた式、$a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ で n を k に置き換えます。こうすることで、a_{k+1} が出てきます。

よく、n を k に置き換えても大丈夫なの？なんて思う人もいます。でも、大丈夫です。なぜかと言えば、$a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ はすべての自然数 n で成立する式なんだよね。だから、n の部分は自然数であれば何がきても成立します。

ということは、当然 n のところに k がきても OK です（k も自然数ですよ）。

後は、この式で $a_k = -k+1$ を代入して整理すると $a_{k+1} = -2(k+1)+1$ になってくれて証明終了です。漸化式の帰納法の証明は、今回やった方法で示すことができるので比較的簡単ですよ。それでは、解答に進みます。

【問題１２（２）の解説】

（１）より、$a_n = -2n+1$ であると予想できる。

以下、$a_n = -2n+1 \cdots$ ① であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、$a_1 = -1$ より ① は成立する。

(ii) $n=k$ (k は 1 以上の整数) のとき、① が成立すると仮定する。

$a_k = -2k+1$

$a_{n+1} = a_n^2 + 2n \cdot a_n - 2$ の n を k で置き換える。

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k^2 + 2k \cdot a_k - 2 \\
&= (-2k+1)^2 + 2k \cdot (-2k+1) - 2 \quad (\because\ a_k = -2k+1) \\
&= 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 2k - 2 \\
&= -2k - 1 \\
&= -2(k+1) + 1
\end{aligned}
$$

① は $n = k + 1$ のときも成立する。

よって、１以上のすべての自然数 n において、$a_n = -2n + 1$ である。

以上より、求める一般項は、$\boldsymbol{a_n = -2n + 1}$

問題１３

$a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題１３の解説】

＊ $a_{n+1} = \dfrac{Ca_n + D}{Aa_n + B}$ 型

いよいよ漸化式の最後の問題です。これは、かなりの難問です。できたら全員に解いて欲しいのですが、数学があまり得意でないという人は解かなくても大丈夫です。それでは、問題に進みます。

問題５で、$a_{n+1} = \dfrac{Aa_n}{Ba_n + C}$ を話しました。分子が単項式なら簡単なのですが、今回のように分子が $Ca_n + D$ の形になった漸化式はかなり大変です。

こういった形の漸化式は、誘導なしで出題されることはあまりないと思います。ですが、誘導なしでも解けてしまいます。誘導なしで、解く方法を解説していきます。ただ、この問題は、かなり難問ですので、難関大学を目指す人以外は無視してもらっても大丈夫だと思います。

と言っても、解き方さえ覚えてしまえば比較的簡単ですよ。難しいと言いましたが、あまり難しくないです（← どっちやねん)。

言いたいこととしては、今回のタイプの問題が出題されるのは難関大学に限られます。ですから、難関大学を目指している受験生はしっかりと勉強をしておいてください。学校の試験対策などで、このプリントをしている人は省略してもらって構いませんよ。それでは、解説に進みます。

まず、$a_{n+1} = \dfrac{Ca_n + D}{Aa_n + B} \cdots ①$ にも特性方程式があります。

このときの特性方程式は $x = \dfrac{Cx + D}{Ax + B}$ です。この方程式の解を α, β とします。

α, β が求まれば、① の両辺から α, β を引きます。
⇑「なんでこうなるの？」より、これはこうすることは暗記するしかないですよ。

では、実際に今回の問題を解説を交えながら解いていきます。

【問題１３の解答と解説】

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} \cdots ①$$

特性方程式より $x = \dfrac{2x+1}{3x+4}$ これを解くと、$x = -1, \dfrac{1}{3}$

① の両辺から -1 を引く

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} - (-1)$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 4} \cdots ②$$ ◀ 右辺は通分をして整理した

＊特性方程式の２解のうち、$x = -1$ を引いたので次は、もうひとつの方の $x = \dfrac{1}{3}$ を引きます。

① の両辺から $\dfrac{1}{3}$ を引く

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3a_n - 1}{3(3a_n + 4)}$$ ◀ 右辺は通分をして整理した

$$= \frac{a_n - \frac{1}{3}}{3a_n + 4} \cdots ③$$

＊で、ここからは ③ ÷ ② をします。これもなぜそうするか？と聞かれても、こうするとうまくいくしかとしか答えようがありません。とりあえず、解法をすべて暗記してください。

＊②で割るのですが、0で割ることはできません。②が0になることはない(つまり$a_n \fallingdotseq -1$)ということを示しておきます。

$a_1 = 1 > 0$ また $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ の形より、すべての自然数 n で $a_n > 0$ となる。よって、
$a_n + 1 \fallingdotseq 0$ ◀ $a_n > 0$ のとき、当然 $a_n + 1 \fallingdotseq 0$ は成立！
「何をしてんの？」と思う人もいると思います。少し、説明します。

今回は $a_n \fallingdotseq -1$ を示したいんだけど、もし仮に $a_n > 0$ がいえたら、当然 $a_n \fallingdotseq -1$ を示したことになるよね。

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ の右辺がすべてプラスだけであらわされています。$a_n > 0$ のとき、当然 $a_{n+1} > 0$ より、帰納的に $a_n > 0$ がいえます。本当だったら、丁寧に帰納法で示した方がいいのですが、漸化式のときはこういった簡単な書き方をすることが多いです。

なんで $a_n \fallingdotseq -1$ を示すのに、$a_n > 0$ を示したの？と思う人もいると思います。単純に、$a_n > 0$ は示しやすい。そして、結果的に $a_n > 0$ を示せば、$a_n \fallingdotseq -1$ も示したことになる。これが理由です。

＊ここから、③÷②をします。ちなみに別に②÷③でもいいですよ。ただ、これをするとき③が0でないということを示さないとダメです。これを示すのは、②が0でないということを示すよりも少しだけ大変そうだったから、使わなかっただけです。

②, ③より

$$\frac{a_{n+1} - \frac{1}{3}}{a_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{a_n - \frac{1}{3}}{\cancel{3a_n + 4}}}{\dfrac{5(a_n + 1)}{\cancel{(3a_n + 4)}}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1}$$

＊上記の式 $\dfrac{a_{n+1}-\dfrac{1}{3}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a_n-\dfrac{1}{3}}{a_n+1}$ より、数列 $\left\{\dfrac{a_n-\dfrac{1}{3}}{a_n+1}\right\}$ は等比数列です。

数列 $\left\{\dfrac{a_n-\dfrac{1}{3}}{a_n+1}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1-\dfrac{1}{3}}{a_1+1}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+1}=\dfrac{1}{3}$、公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列である。

$$\frac{a_n-\frac{1}{3}}{a_n+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

＊後は、上記の式を a_n について解けば、a_n が求まります。

$$\begin{aligned}\frac{a_n-\frac{1}{3}}{a_n+1}&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{3\cdot5^{n-1}}\\3\cdot5^{n-1}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)&=a_n+1\\3\cdot5^{n-1}a_n-5^{n-1}&=a_n+1\\(3\cdot5^{n-1}-1)a_n&=5^{n-1}+1\\a_n&=\boldsymbol{\frac{5^{n-1}+1}{3\cdot5^{n-1}-1}}\end{aligned}$$

＊「ホントに長かった …」でも、難関大学を狙う人は重要な問題なので、解答の流れを全部覚えておいてくださいね。

これで、漸化式の問題はすべて終わりです。大変だったかもしれません。ただ、漸化式は解法さえ覚えてしまえば簡単です。このプリントを繰り返し、繰り返し解いてぜひとも漸化式を理解してください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司